Actas del

IX Congreso Uruguayo de Educación Matemática

10, 11 y 12 de Junio de 2022

Montevideo, Uruguay

semur EDICIONES

Actas del noveno Congreso Uruguayo de Educación Matemática

10, 11 y 12 de Junio de 2022

Montevideo, Uruguay

1ª Edición: febrero de 2024

Edición: Daniela Pagés y Mónica Olave
Diseño de portada: Mathias Tejera
Diseño gráfico: Mónica Olave

Montevideo, Uruguay

ISBN: 978-9915-9642-0-1

semur

SOCIEDAD DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA URUGUAYA

Índice

Prólogo

Este libro recoge algunos de los trabajos presentados en el 9º Congreso Uruguayo de Educación Matemática (CUREM 9), realizado en Montevideo (Uruguay) entre el 10 y el 12 de junio de 2022. El evento fue organizado por la Sociedad de Educación Matemática Uruguaya (Semur). Se desarrolló en modalidad híbrida y la sede del encuentro presencial fue el Instituto de Perfeccionamiento y Estudios Superiores (IPES) del Consejo de Formación en Educación (CFE).

El CUREM 9 tuvo como uno de sus objetivos promover el intercambio de ideas, experiencias, conocimientos y acciones, en la búsqueda de mejorar la situación actual de la educación en general y de la educación matemática en particular, en los distintos niveles educativos. Asimismo, en el marco del sostenido desarrollo de la investigación en Educación Matemática en nuestro país, se procuró analizar y difundir los aportes de la Didáctica de la matemática, la Epistemología de la ciencia y las teorías del aprendizaje a la educación matemática. Se buscó propiciar un encuentro profesional y enriquecedor entre maestros, profesores de enseñanza media y profesores de nivel universitario que se dedican a la enseñanza de la matemática.

El congreso retomó la modalidad presencial luego de la pandemia por COVID-19, dando continuidad a la tradición instaurada en Uruguay desde 1989, y promovida por Semur desde su fundación, de reunir a maestros, profesores e investigadores en un espacio de encuentro y discusión de las prácticas educativas en matemática.

Con la publicación de estas actas se da inicio al sello editorial *Semur Ediciones*, que pretende dar impulso a publicaciones vinculadas con la investigación en Educación Matemática así como a iniciativas de experiencias educativas.

Agradecemos a los invitados especiales al CUREM 9: Dra. Mónica Villarreal (Argentina), Dr. Javier Lezama (México), Dra. Jimena Lemes (Uruguay – Francia), Dr. Sebastián Parodi (Uruguay) y Prof. Robert Pontecorvo (Estados Unidos) por su contribución a la calidad académica de este congreso. Asimismo agradecemos a todos los colegas que realizaron talleres y comunicaciones durante el evento, por su disposición al intercambio de ideas en torno a la educación matemática.

Mónica Olave
monicaolave23@gmail.com

Daniela Pagés
danielapages@gmail.com

Mirada profesional y signo igual

Sebastián Parodi
parodiseb@gmail.com   Consejo de Formación en Educación. Uruguay

Tema: Formación de profesores

Modalidad: Conferencia plenaria

Nivel educativo: Superior

Resumen: *El interés en la habilidad docente de mirar profesionalmente surge del compromiso por aportar a la mejora de las prácticas profesionales. Se trata de una habilidad que consiste en utilizar el conocimiento de la didáctica de la matemática para comprender los entornos de aprendizaje y en utilizar esa comprensión para tomar decisiones que favorezcan la enseñanza. En este trabajo se presenta una caracterización de la mirada profesional, a través de un ejemplo de una investigación realizada con futuros docentes de Uruguay, en situaciones que involucran la comprensión del signo igual. Se analiza particularmente el diseño y la implementación de un experimento de enseñanza que puede contribuir al desarrollo de esta habilidad imprescindible del quehacer profesional.*

Palabras claves: *mirada profesional, signo igual, experimento de enseñanza, futuro docente.*

Introducción

En el contexto de la enseñanza primaria se ha reportado que favorecer la comprensión del docente acerca del pensamiento matemático de los alumnos, así como promover la utilización de esa comprensión para tomar decisiones relativas a la enseñanza, contribuye con el aprendizaje de los estudiantes (por ejemplo, Jacobs et al., 2007). Esto forma parte de lo que varios autores denominan desarrollar la habilidad docente de mirar profesionalmente (por ejemplo, Mason, 2002).

Por otra parte, estudios que exploran la comprensión del signo igual que evidencian los alumnos de distintos niveles educativos muestran que estos tienden a interpretar el signo igual como el indicador del resultado de una operación y no como el indicador de una relación de equivalencia, que resulta ser una interpretación imprescindible para el abordaje del álgebra (por ejemplo, Parodi, 2016). Además, investigaciones que indagan sobre el conocimiento del docente acerca de la enseñanza relativa al signo igual, señalan que los docentes no identifican que los significados de este signo representan una dificultad para los estudiantes (por ejemplo, Stephens, 2006).

En este escrito, se propone un recorrido que inicia con la presentación de la problemática del signo igual y que prosigue con la conceptualización de la habilidad de mirar profesionalmente, para culminar con el reporte de un estudio que explora, justamente, la mirada profesional en situaciones que involucran al signo igual. Se brindarán aportes para tomar mejores decisiones relativas a los procesos de enseñanza en formación docente, que podrá repercutir positivamente en el aprendizaje de los estudiantes de enseñanza media.

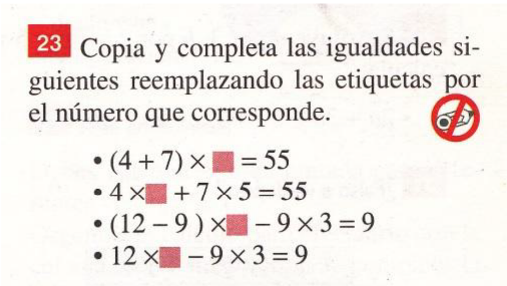
Problemática del signo igual

Para ilustrar esta problemática, esta sección aborda casos reportados en la literatura que focalizan tanto en el pensamiento matemático de los alumnos como en las propuestas de los libros de texto o en las tareas profesionales de los docentes.

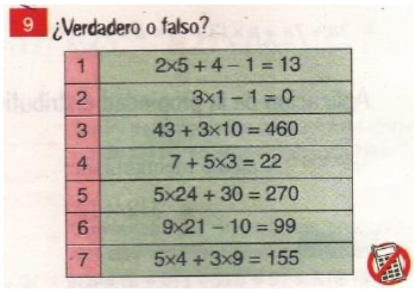
Molina et al. (2009), por ejemplo, reportan que los estudiantes españoles de tercer año de enseñanza primaria (8-9 años) participantes de su estudio tienden a completar el espacio vacío de la expresión 8+4=_+5 con el número 12, porque 8+4=12. Esta interpretación, sostienen, persiste cuando el espacio vacío ocupa otro lugar en la igualdad o cuando se plantean igualdades en un contexto de operaciones solamente del lado derecho o en un contexto de ausencia de operaciones. Burgell y Ochoviet (2015), en tanto, reportan que una proporción importante de estudiantes uruguayos de primer año de enseñanza media (11-12 años) participantes de su estudio afirman que 7+12=19-3 es verdadero porque 7+12=19. En ambos casos, se infiere que los alumnos están interpretando al signo igual como el indicador del resultado una operación, en lugar de interpretar a este signo como el indicador de una relación de equivalencia. Ahora bien, ¿qué dificultades puede acarrear esta interpretación del signo igual, por ejemplo, en un contexto algebraico?

Parodi, Ochoviet y Lezama (2017) señalan que, ante la tarea de escribir una ecuación con solución 5 y explicar el razonamiento empleado, una estudiante uruguaya de segundo año de enseñanza media (12-13 años) propone la ecuación “10-*x*=5” y explica que “*x* es 5, por lo tanto, al restarle 5 al 10 nos quedaría como solución el número 5”. Es decir, la alumna plantea una ecuación que, si bien tiene solución 5, también tiene segundo miembro 5. Entonces, conviven en la estudiante dos ideas contradictorias respecto del concepto de solución de una ecuación: como valor de la variable que transforma a la expresión en una igualdad numérica y como segundo miembro de la ecuación. A propósito, Knuth et al. (2008), a partir de un estudio realizado con estudiantes norteamericanos de enseñanza media básica (11-14 años), encuentran que quienes interpretan el signo igual como el indicador de una relación de equivalencia tienen mayores posibilidades de identificar ecuaciones equivalentes sin necesidad de resolverlas. Estas evidencias ponen de relieve la relación entre las interpretaciones del signo igual y el desempeño de los estudiantes al resolver ecuaciones y tareas que involucran ecuaciones equivalentes.

Con relación a las propuestas de los libros de texto, Belcredi y Zambra (1998), por ejemplo, plantean tareas como las que siguen para abordar el cálculo numérico en un curso de matemática de primer año de enseñanza media básica (figura 1):


23 Copia y completa las igualdades siguientes reemplazando las etiquetas por el número que corresponde.

- $(4 + 7) \times ■ = 55$
- $4 \times ■ + 7 \times 5 = 55$
- $(12 - 9) \times ■ - 9 \times 3 = 9$
- $12 \times ■ - 9 \times 3 = 9$

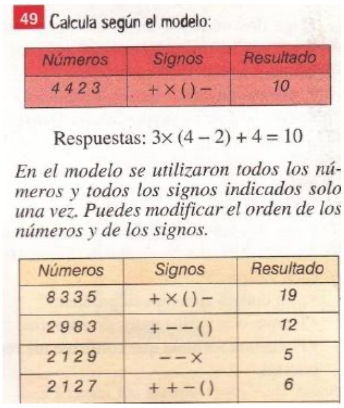

9 ¿Verdadero o falso?

1	$2\times5 + 4 - 1 = 13$
2	$3\times1 - 1 = 0$
3	$43 + 3\times10 = 460$
4	$7 + 5\times3 = 22$
5	$5\times24 + 30 = 270$
6	$9\times21 - 10 = 99$
7	$5\times4 + 3\times9 = 155$

Figura 1: Tareas de un libro de texto de la matemática escolar (Zambra y Belcredi, 1998, pp. 20-21)

Estas dos tareas (figura 1), si bien proponen igualdades numéricas para completar (izquierda) o sentencias numéricas para analizar (derecha), en consonancia con lo que sugiere la literatura para explorar o enriquecer las interpretaciones del signo igual evidenciadas por los estudiantes, tienen la particularidad de que todas las expresiones se plantean en un contexto estándar de operación-igual-respuesta.

Similar es lo que ocurre en la tarea de la figura 2, en la que se proponen distintos números y símbolos para combinar, con el fin de obtener sentencias en las que todas las operaciones queden a la izquierda y el resultado de estas operaciones a la derecha del signo igual.


49 Calcula según el modelo:

Números	Signos	Resultado
4 4 2 3	+ × ( ) −	10

Respuestas: $3\times(4-2)+4=10$

En el modelo se utilizaron todos los números y todos los signos indicados solo una vez. Puedes modificar el orden de los números y de los signos.

Números	Signos	Resultado
8 3 3 5	+ × ( ) −	19
2 9 8 3	+ − − ( )	12
2 1 2 9	− − ×	5
2 1 2 7	+ + − ( )	6

Figura 2: Tarea de un libro de texto de la matemática escolar (Zambra y Belcredi, 1998, p. 24)

Estos diseños no contribuyen a que afloren distintas interpretaciones del signo igual, al tiempo que refuerzan la idea de que este signo se utiliza solamente como señal de hacer algo o para indicar el resultado de una operación.

En relación con las tareas profesionales de los docentes, en tanto, Stephens (2006) realiza un estudio con futuros docentes norteamericanos de enseñanza primaria, con el fin de explorar la habilidad docente de interpretar el pensamiento matemático de los escolares en situaciones que involucran al signo igual. A los participantes se les presenta, por ejemplo, el caso de una escolar que, sabiendo que 16+15=31 es verdadera, responde que 16+15-9=31-9 es "falsa, porque si restas 9, no puede seguir siendo igual a 31". A partir de este caso, un participante del estudio afirma: "Realmente no sé lo que pensó la alumna. ¿No habrá visto el -9 del lado derecho? Quizás, fue una distracción visual. Es lo único que se me ocurre". El futuro docente considera que el error de la estudiante proviene de una cuestión genérica o circunstancial, como lo es una posible distracción, sin considerar que la causa del error radica en la dificultad para interpretar el signo igual como el indicador de una relación de equivalencia.

De igual modo, Medina (2018) reporta que, en un estudio realizado con maestras que actuaban como adscriptoras de práctica docente de futuras maestras de Uruguay, ante la situación de un escolar que completa una igualdad numérica de este modo: 5+3=8+1=9, una de las participantes valida la respuesta del estudiante, mientras que otra participante identifica el error, proponiendo la siguiente devolución: "Te apuraste. Realizaste la suma sin tener en cuenta que le debes agregar un 1 al resultado". En este estudio se detectaron dificultades en las participantes, tanto para identificar errores de los escolares como para realizar recomendaciones que abonen a la interpretación del signo igual.

Los casos analizados en esta sección dejan al descubierto tres aspectos fundamentales que caracterizan a la problemática del signo igual en el ámbito de la matemática escolar: i) tendencia de los estudiantes de distintos niveles educativos a interpretar el signo igual como el indicador del resultado de una operación, ii) relación entre las interpretaciones del signo igual y algunas de las dificultades de los estudiantes al incursionar en el estudio del álgebra, iii) invisibilidad de esta problemática, tanto en los libros de texto como por parte de los docentes en servicio o en formación de distintos niveles educativos.

Ahora, ¿qué puede aportar la habilidad docente de mirar profesionalmente a la problemática del signo igual? Responder esta pregunta requiere, previamente, una caracterización de la mirada profesional. Esto es lo que se desarrolla en la siguiente sección.

La habilidad de mirar profesionalmente

Si a un grupo de personas se le pregunta qué ve en la siguiente imagen (figura 3), cabe esperar una multiplicidad de respuestas. Una posibilidad, es responder que la imagen muestra sencillamente un conjunto de naranjas. También podría identificarse la forma en que han sido cortadas las naranjas, a partir de una comparación entre naranjas. Incluso, podría advertirse la representación de ciertos cuerpos geométricos, como consecuencia de los cortes que han sufrido las naranjas. En retrospectiva, esta secuencia hipotética de observación y reflexión requiere una mirada global de la imagen, un discernimiento de detalles y una relación entre detalles para inferir propiedades. También, aunque menos plausible en este ejemplo, un razonamiento sobre la base de esas propiedades. Estos son los distintos componentes de la mirada profesional, también conocida como la habilidad de *mirar con sentido* o *noticing*. Se trata de una habilidad docente que implica percibir e interpretar aspectos significativos de una situación, para tomar decisiones que estén fundamentadas en esa interpretación.

Figura 3: Fotografía de naranjas para ejemplificar la mirada profesional (Mason, 2020)

Pero, ¿qué importancia tiene la habilidad de mirar profesionalmente en el contexto escolar? ¿Cómo se visualiza el desarrollo de esta habilidad en el ejercicio de la tarea profesional del docente? Esta sección aborda tres ejemplos, reportados en la literatura, para aportar a la conceptualización de la mirada profesional.

Primer ejemplo

Dreher y Kuntze (2015) realizan un estudio con profesores alemanes en servicio y en formación, para explorar la mirada profesional en torno al uso de las representaciones en el ámbito escolar. Se presenta un episodio de clase para analizar por los participantes, en el que un estudiante quiere visualizar la suma de dos fracciones en el rectángulo dado, pero el docente explica el cálculo utilizando una representación circular (figura 4). Si bien convenía mostrar la suma con el rectángulo, porque la subdivisión en doceavos ya estaba disponible, el docente realiza un cambio de representación inapropiado que fuerza al estudiante a comprometerse innecesariamente con otra representación.

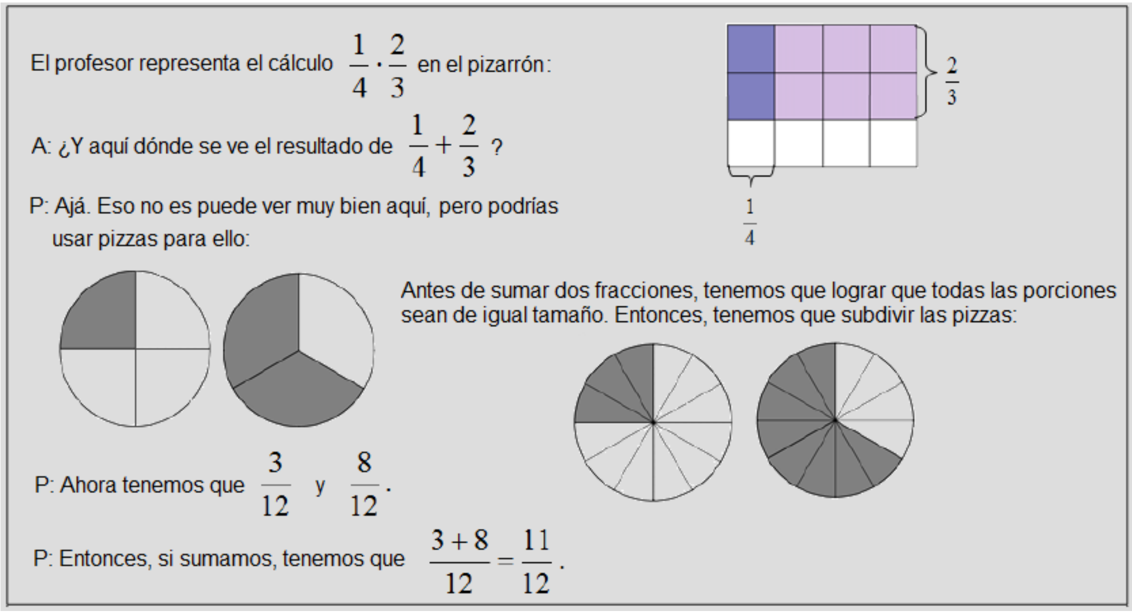


Figura 4: Episodio de clase para analizar (Dreher y Kuntze, 2015, p. 13)

Al analizar el uso de las representaciones por parte del docente en este episodio de clase, uno de los participantes del estudio afirma: “Es razonable distinguir entre multiplicación y suma, para que el alumno se dé cuenta de que debe proceder distinto (círculos o rectángulos). Por lo tanto, es correcto elegir una forma diferente de representación para cada operación”. Aquí, el participante considera un punto de vista personal acerca de cómo debería llevarse a cabo la enseñanza de la adición y la multiplicación de fracciones, sin visualizar el rol potencialmente obstaculizador que tiene el tratamiento de representación impuesto por el docente, para la comprensión del alumno ligada al tópico en cuestión.

Otro participante afirma: "Dado que la pregunta del alumno se refiere a la representación con el rectángulo, el profesor debería haberse quedado con esta representación. Además, dibujar un nuevo rectángulo no hubiese requerido más tiempo que dibujar el círculo". En este otro caso, el participante considera el interés del estudiante, que es un aspecto específico del episodio de clase analizado, y lo toma en cuenta para valorar el uso de las representaciones por parte del docente. En efecto, la mirada profesional refiere a la posibilidad de identificar aspectos relevantes de una situación, para poder interpretarlos y tomar decisiones fundamentadas en esa interpretación.

Segundo ejemplo

Jacobs et al. (2010) reportan un estudio con maestros norteamericanos en servicio y en formación, que explora la mirada profesional del pensamiento matemático de los estudiantes en torno al cálculo numérico. Se presenta un video en el que dos escolares (6-7 años) resuelven un problema aditivo: "En clase hay 19 niños y solo 7 compran el almuerzo. ¿Cuántos niños traen el almuerzo desde casa?". La estrategia de los escolares consistió en escribir "19-7=" y en utilizar sus dedos para descontar 7 de 19.

A los participantes se les pregunta qué aprendieron acerca de la comprensión matemática de los alumnos. Un participante afirma: "Es importante permitir a los estudiantes diferentes herramientas para resolver los problemas matemáticos, porque eso les permite elegir el camino más fácil. El maestro potencia la comunicación, los escucha y respeta sus palabras". Aquí, para interpretar la comprensión de los escolares, el participante realiza comentarios generales acerca de la enseñanza y el aprendizaje de la matemática.

Otro participante afirma: "Estos niños entienden que el problema es de sustracción y por eso hacen una resta. Ellos no necesitan contar de 7 a 19, sino que utilizan sus dedos para contar hacia atrás desde 19. Restan, descontando 7 a 19. Parecen tener un buen sentido numérico". Aquí, el participante reconoce que la estrategia de contar hacia atrás requiere de la abstracción mental de una cantidad, por eso alude al desarrollo de sentido numérico de los escolares. Es decir, focaliza en dar sentido a los detalles de la estrategia analizada, en consonancia con los resultados de investigación relativos al pensamiento matemático de los estudiantes. Los investigadores infieren que este participante muestra una sólida interpretación de la estrategia de los escolares, porque razona y reflexiona acerca de esta, vinculando evidencias concretas con un marco de análisis general. Esta conceptualización de la destreza de interpretar, de hecho, está ligada al constructo de la mirada profesional del pensamiento matemático de los alumnos.

Tercer ejemplo

Zapatera (2019) realiza un estudio con maestros españoles en formación para explorar la mirada profesional del pensamiento matemático de los estudiantes en torno a la generalización de patrones. Se presenta una tarea dirigida a escolares, junto con tres posibles respuestas para analizar (figura 5). En la tarea, a partir de los primeros tres términos de una sucesión formada por mesas y sillas, se pide: continuar la sucesión y calcular el número de sillas para un número *pequeño* de mesas, calcular el número de sillas para un número *grande* de mesas, explicar la regla general que relacione las dos variables (cantidad de sillas y cantidad de mesas) y calcular el número de mesas para cierto número de sillas. Una de las respuestas dadas para analizar, refiere a un escolar que no es capaz de coordinar las estructuras espacial y numérica, lo que provoca que defina una relación funcional errónea que le impide resolver correctamente el resto de los apartados.

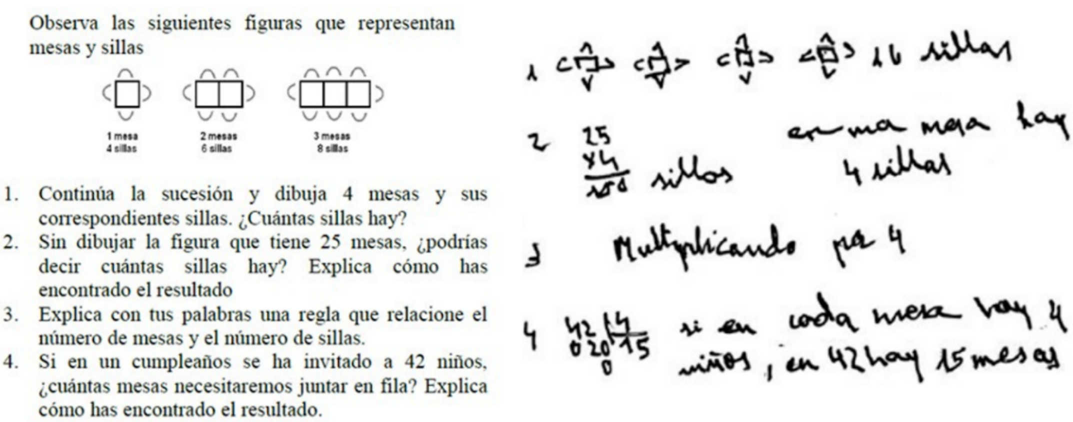


Figura 5: Respuesta de escolar a tarea de generalización de patrones (Zapatera, 2019, p. 1473)

A los participantes se les pide identificar aspectos matemáticos relevantes de la producción del escolar, una interpretación del pensamiento matemático del alumno y la planificación de una intervención que al estudiante le permita avanzar en el aprendizaje de este tópico. Ante esta solicitud, un participante afirma: “Dibuja mal las mesas, porque las separó y no debió haberlo hecho. No ha sabido hacer ningún apartado bien. Le ayudaría para que no se desanimara y siguiera intentándolo". Este participante, afirman los investigadores, ha reconocido implícitamente la falta de coordinación entre estructuras, pero no ha sido capaz de interpretar la comprensión del alumno y ha propuesto una acción de tipo actitudinal, sin relación con la generalización de patrones.

Otro participante afirma: "Considera un patrón incorrecto porque dibuja las mesas separadas, entonces tiene sillas de más. Presenta un grado de comprensión bajo, porque se equivoca con la estructura espacial. Lo ayudaría con materiales manipulativos, como las mesas y sillas de clase, para que visualice mejor la coordinación entre lo espacial y lo numérico". Este participante, según los investigadores, reconoce que el alumno no domina la estructura espacial, infiere el bajo estadio de comprensión del estudiante y propone una acción concreta para que, manipulando materiales, este pueda mejorar su comprensión de la generalización y ver mejor la coordinación entre lo espacial y lo numérico.

A partir de los tres ejemplos reportados, cabe afirmar que mirar profesionalmente el pensamiento matemático de los estudiantes, en particular, es una habilidad que implica tres destrezas de parte del profesor: percibir las estrategias de los estudiantes, interpretar la comprensión de los estudiantes y decidir cómo responder u orientar a partir de esa comprensión (Jacobs et al., 2010). En otras palabras, implica utilizar el conocimiento requerido para la enseñanza de la matemática (Ball et al. 2008), proveniente tanto de la didáctica de la matemática como de la propia práctica profesional, con el fin de dar explicación a los fenómenos didácticos y, a partir de ello, tomar decisiones que favorezcan el aprendizaje. Se trata de una habilidad esencial del quehacer profesional, que brinda herramientas para tomar decisiones fundamentadas que abonen a la enseñanza.

Ahora, los ejemplos precedentes muestran que la formación académica y la experiencia profesional de los docentes no aseguran el desarrollo de la mirada profesional. Es decir, la mirada profesional no es un atributo que se obtiene al egresar de un instituto de formación docente o al desempeñar la tarea profesional durante muchos años, sino que es una habilidad que debe ser atendida especialmente. Es una habilidad que se desarrolla en el ejercicio de la profesión, pero requiere de dispositivos apropiados para desplegarse y resultar fructífera en la práctica. En particular, un docente puede tener mucha experiencia de aula y formación pero, si no ha reflexionado y no ha trabajado aspectos específicos del pensamiento matemático de los alumnos, no tiene por qué haber conquistado la mirada profesional en torno a un tópico en particular. Esto es, no refiere a una habilidad general, sino que se desarrolla con relación a los distintos tópicos matemáticos. En suma, la mirada profesional es una habilidad que se desarrolla en el ejercicio de la docencia, requiere formación específica para su desarrollo y es temáticamente específica.

Entonces, ¿cómo se aprende la mirada profesional? ¿Cómo se construye? ¿Cuáles son las fuentes de las que se nutre el desarrollo de la mirada profesional? La siguiente sección presenta hallazgos de una investigación que explora puntualmente la mirada profesional en torno al signo igual.

Mirada profesional en torno al signo igual

En Parodi (2022) se examina la habilidad de un grupo de profesores en formación para mirar profesionalmente el pensamiento matemático de los estudiantes en situaciones que involucran al signo igual. Se adopta como perspectiva teórica una conceptualización de la habilidad de mirar profesionalmente (Jacobs et al., 2010) y una categorización de los significados del signo igual (Matthews et al., 2012).

Participan nueve estudiantes de profesorado uruguayos que cursan cuarto año de la carrera y que tienen un grupo a cargo en la enseñanza media. Se diseña e implementa un experimento de enseñanza (Molina et al., 2011), en el que se aplica un cuestionario inicial y, posteriormente, una intervención de aula con todos los participantes. En esta intervención, puntualmente, se propone una dinámica de taller, en la que los futuros profesores reciben una secuencia de actividades para analizar el caso de Rocío (11 años), una alumna de enseñanza media que resuelve distintas tareas que involucran interpretaciones del signo igual. Los tres equipos reciben las distintas actividades para discutir en la interna de cada equipo y luego en forma colectiva con todo el grupo. Cada actividad se presenta al concluir la puesta en común de la actividad anterior.

Los resultados de este estudio ponen de relieve dificultades específicas de los participantes con respecto a cada una de las tres destrezas de la mirada profesional en situaciones que involucran al signo igual.

Al percibir las estrategias de Rocío, los participantes suelen centrar la atención en la escritura matemática empleada en cada producción. Entonces cuestionan, por ejemplo, la flecha que utiliza la alumna para señalar el valor de x en la resolución de una ecuación o la ausencia de un signo igual al realizar una verificación. Sin embargo, la corrección de la escritura matemática, que puede ser un aspecto a considerar en las estrategias de los estudiantes y es esperable que se desarrolle paulatinamente durante la escolarización de los alumnos, no debería constituir el principal objetivo de aprendizaje en los primeros abordajes algebraicos de la enseñanza media.

Al interpretar la comprensión matemática de la estudiante, los participantes aluden con frecuencia a la claridad u organización de los planteos para justificar ciertos errores de la alumna, en lugar de problematizar conceptualmente estos aspectos y advertir las dificultades evidenciadas por la estudiante con relación al aprendizaje de los conceptos y habilidades involucradas. Los participantes presumen una comprensión matemática de los conceptos requeridos en la tarea analizada o reclaman más información, aun cuando las evidencias disponibles permiten inferir la forma en que Rocío está comprendiendo un concepto o procedimiento en particular.

Al tomar decisiones sobre la base de la comprensión, los participantes tienden a proponer intervenciones para evitar los errores de la estudiante, en lugar de tomar decisiones para abordar y favorecer la superación de esos errores. Por ejemplo, sugieren plantear ecuaciones que no sean del tipo $ax+b=c$ para impedir que la alumna evidencie una asociación entre resultado, solución y segundo miembro de una ecuación, que ligado a una interpretación operacional del signo igual puede obstaculizar la comprensión del concepto de solución de una ecuación. Entonces, incorporan cambios a las tareas en las que advierten errores de la alumna, sin promover explícitamente el abordaje de los errores identificados.

Un análisis conjunto de las evidencias recogidas permite observar una relación de dependencia entre la destreza de decidir y las otras dos destrezas de la mirada profesional (en consonancia con Jacobs et al., 2010, entre otros), porque la toma de decisiones que favorecen la comprensión del signo igual (por ejemplo, abordar sentencias numéricas en un contexto no estándar de operaciones a ambos lados del signo igual), evidenciada por los participantes durante el experimento de enseñanza, habitualmente estuvo precedida por la percepción de aspectos matemáticamente relevantes del signo igual (por ejemplo, la lectura bidireccional) y por la interpretación de la comprensión de Rocío con respecto a este signo (por ejemplo, como un indicador del resultado de una operación).

El análisis realizado también muestra una relación intrínseca entre las destrezas de percibir e interpretar. No se niega que el conocimiento matemático facilita la interpretación de la comprensión matemática de los estudiantes, dado que una eventual dificultad de los participantes para interpretar el signo igual de manera relacional, por ejemplo, podría conducir a la validación de producciones incorrectas (Medina, 2018, entre otros), pero las evidencias recogidas en este estudio también permiten inferir que el propio desarrollo de la destreza de interpretar puede enriquecer el conocimiento matemático del futuro profesor (en consonancia con Prediger, 2010, entre otros).

Los hallazgos obtenidos ponen de manifiesto que el experimento de enseñanza diseñado e implementado en el marco de este estudio aporta al desarrollo de la mirada profesional en situaciones que involucran al signo igual. Esto es especialmente visible cuando se analiza la ruta que recorre la mirada profesional de cada equipo durante la intervención de aula, en la que se evidencia progresivamente la percepción de aspectos matemáticamente relevantes del signo igual, así como la interpretación de la comprensión de la alumna con respecto a este signo y la toma de decisiones para enriquecer esa comprensión. Estos hallazgos ponen de relieve que el diseño de una secuencia de actividades que propone el análisis de un estudio de casos (Markovits y Smith, 2008), a partir de producciones y entrevistas provenientes de la literatura (Parodi, 2016) que dejan al descubierto distintas interpretaciones del signo igual por parte de una estudiante de enseñanza media, así como una implementación de esta secuencia que promueve una práctica de conversación productiva en el aula (Chapin y O'Connor, 2007), permite visibilizar la problemática de la enseñanza del signo igual y constituye una oportunidad para que los futuros profesores desarrollen las tres destrezas que conceptualizan la mirada profesional.

Reflexiones finales

Una interpretación del signo igual como indicador del resultado de una operación persiste en estudiantes de distintas edades (Molina, 2009; Burgell y Ochoviet, 2015; entre otros). Este hallazgo, reportado ampliamente en la literatura, demanda una enseñanza que atienda específicamente las interpretaciones del signo igual, para favorecer la incursión de los estudiantes en el estudio del álgebra (Knuth et al., 2008; Parodi, Ochoviet y Lezama, 2017; entre otros). Sin embargo, los docentes no conocen la problemática del signo igual y en sus clases no le prestan una especial atención a la interpretación de este signo (Stephens, 2006; Medina, 2018; entre otros). En particular, los trabajos reportados revelan dificultades de los docentes para anticipar objetivos de enseñanza, estrategias de resolución u obstáculos en el abordaje de tareas que involucran al signo igual.

La mirada profesional, en tanto, entendida como la habilidad de poner en uso el conocimiento matemático para la enseñanza (Ball et al., 2008) para percibir las estrategias, interpretar la comprensión de los alumnos y decidir cómo responder a partir de esa comprensión (Jacobs et al., 2010), se presenta como una habilidad docente imprescindible que puede impactar positivamente en el aprendizaje de los estudiantes y que no ha sido suficientemente desarrollada en ámbitos de formación o profesionalización docente, por ejemplo, en torno al tópico del signo igual.

El desarrollo de la mirada profesional requiere de experiencias de formación apropiadas, diseñadas con metas particulares, en torno a tópicos específicos. En este trabajo se ejemplificaron e ilustraron algunos estudios que constituyen oportunidades para que los docentes en servicio y en formación desarrollen las tres destrezas de esta habilidad en situaciones que requieren una comprensión del signo igual. Los hallazgos reportados permiten tomar conciencia de la problemática en cuestión, al tiempo que brindan herramientas para que los formadores de docentes puedan reorientar la formación de los futuros docentes, en lo que refiere específicamente a la mirada profesional en torno al signo igual.

Referencias bibliográficas

Ball, D., Thames, M. y Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: what makes it special? *Journal of Teacher Education, 59*(5), 389–407.

Belcredi, L. y Zambra, M. (1998). *Matemática Primer Año del Ciclo Básico*. La Flor del Itapebí.

Burgell, F. y Ochoviet, C. (2015). Significados del signo de igual y aspectos de su enseñanza. Un estudio realizado con estudiantes de primer año de enseñanza secundaria y sus profesores. *Enseñanza de las Ciencias, 33*(3), 77–98.

Chapin, S. y O'Connor, C. (2007). Academically productive talk: supporting students' learning in mathematics. *The Learning of Mathematics, 69*, 113–128.

Dreher, A. y Kuntze, S. (2015). Teachers' professional knowledge and noticing: the case of multiple representations in the mathematics classroom. *Educational Studies in Mathematics, 88*, 89–114.

Jacobs, V., Franke, M., Carpenter, T., Levi, L. y Battey, D. (2007). Professional development focused on children's algebraic reasoning in elementary school. *Journal for Research in Mathematics Education, 38*(3), 258–288.

Jacobs, V., Lamb, L. y Philipp, R. (2010). Professional noticing of children's mathematical thinking. *Journal for Research in Mathematics Education, 41*(2), 169–202.

Knuth, E., Alibali, M., Hattikudur, S., McNeil, N. y Stephens, A. (2008). The importance of equal sign understanding in the middle grades. *Mathematics Teaching in the Middle School, 13*(9), 514–519.

Markovits, Z. y Smith, M. (2008). Cases as tools in mathematics teacher education. En T. Wood y D. Tirosh (Eds.), *International Handbook of Mathematics Teacher Education Tools and Processes in Mathematics Teacher Education* (Vol. 2, pp. 39–64). Sense Publishers.

Mason, J. (2002). *Researching your own practice: The discipline of noticing.* Routledge Falmer.

Mason, J. [AssocTeachersMaths] (2020, 24 de junio). *Noticing and Attention – with John Mason* [video]. Youtube. https://youtu.be/6oLldNM-T8k

Matthews, P., Rittle–Johnson, B., McEldoon, K. y Taylor, R. (2012). Measure for measure: what combining diverse measures reveals about children's understanding of the equal sign as an indicator of mathematical equality. *Journal for Research in Mathematics Education, 43*(3), 316–350.

Medina, L. (2018). *Conocimientos matemáticos puestos en juego por un grupo de maestros de una escuela de práctica para la enseñanza del signo igual* (Tesis de maestría no publicada). IPN.

Molina, M., Castro, E. y Castro, E. (2009). Cómo entienden los alumnos de primaria el signo igual en las ecuaciones numéricas. *Electronic Journal of Research in Educational Psychology, 7*(1), 341–368.

Molina, M., Castro, E., Molina, J. y Castro, E. (2011). Un acercamiento a la investigación de diseño a través de los experimentos de enseñanza. *Enseñanza de las Ciencias, 29*(1), 75–88.

Parodi, S. (2016). *Significados del signo igual en la entrada al álgebra: un estudio de casos con estudiantes de segundo grado de enseñanza secundaria* (Tesis de maestría no publicada). IPN.

Parodi, S. (2022). *La habilidad de mirar profesionalmente del futuro profesor en situaciones que involucran al signo igual* (Tesis de doctorado no publicada). IPN.

Parodi, S., Ochoviet, C. y Lezama, J. (2017). La comprensión del signo de igual en la entrada al álgebra: el diseño de tareas y la conversación en la clase de matemática. *Enseñanza de las Ciencias, 35*(3), 51–67.

Prediger, S. (2010). How to develop mathematics–for–teaching and for understanding: the case of meanings of the equal sign. *Journal of Mathematics Teacher Education, 13*(1), 73–93.

Stephens, A. (2006). Equivalence and relational thinking: preservice elementary teachers' awareness of opportunities and misconceptions. *Journal of Mathematics Teacher Education, 9*(3), 249–278.

Zapatera, A. (2019). Descriptores del desarrollo de la mirada profesional en el contexto de la generalización de patrones. *Bolema: Boletim de Educação Matemática, 33*(65), 1464–1486.

Modelización matemática y tecnologías digitales en la formación de futuros profesores y profesoras[1]

Mónica E. Villarreal

monica.ester.villarreal@unc.edu.ar. Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET) y Facultad de Matemática, Astronomía, Física y Computación – Universidad Nacional de Córdoba. Argentina

Tema: Modelización matemática y tecnologías en la formación docente inicial

Modalidad: Conferencia Plenaria

Nivel educativo: Superior

Resumen: *El uso de tecnologías digitales y tareas de modelización para la enseñanza de la matemática en la educación secundaria es recomendado en diversos diseños curriculares en todo el mundo. La formación del profesorado es crucial en este proceso y las experiencias que futuros profesores y profesoras vivan durante su formación inicial en torno a la realización de tareas de modelización y uso de tecnologías resultan fundamentales para la integración de las mismas en su enseñanza futura. En esta conferencia se describe una propuesta pedagógica que conjuga la modelización y las tecnologías digitales de manera sinérgica y que se ha implementado desde 2010 en la formación de futuros profesores y profesoras de matemática en una universidad pública de Argentina. Se explicitan los presupuestos teóricos que sustentan esta propuesta y se presentan proyectos de modelización desarrollados por estudiantes en 2020. Se analizan brevemente los temas elegidos para los proyectos, el papel de las tecnologías digitales, los tipos de aprendizaje que se produjeron, y las dificultades y limitaciones observadas.*

Palabras claves: *formación inicial del profesorado, escenario de modelización, tecnologías digitales.*

Introducción[2]

Los diseños curriculares para la educación secundaria en distintos países recomiendan la utilización de tecnologías digitales y tareas de modelización para la enseñanza y el aprendizaje de la matemática, pero su implementación sigue siendo limitada en varios países, incluyendo algunas regiones de Argentina. Si bien existen factores relacionados

[1] Una conferencia similar a esta fue dictada por la autora, en modalidad a distancia, en la 14 International Conference on Mathematical Education (ICME 14), Shanghai, julio de 2021. El texto que aquí se publica está basado en la conferencia original titulada: *Modeling and Digital Technologies: Experiences and Challenges for Teacher Education*.

[2] Las experiencias de docencia e investigación que se relatan en este texto han sido desarrolladas por integrantes del Grupo de Enseñanza de la Ciencia y la Tecnología-Educación Matemática (GECyT-EM), perteneciente a la Facultad de Matemática, Astronomía, Física y Computación de la Universidad Nacional de Córdoba, en contextos de formación de futuros profesores y profesoras de matemática.

con la falta de infraestructura tecnológica, o la prevalencia de cierta cultura académica conservadora que impide la aceptación de tales recomendaciones, la literatura reporta que la formación docente es crucial en el fomento de la incorporación de tecnologías (Clark-Wilson et al., 2014) y modelización (Blum, 2015; Doerr, 2007) en el nivel secundario. Brindar a futuros profesores y profesoras (FP) la oportunidad de experimentar con tareas de modelización matemática y tecnologías durante su formación de grado, contribuye a que las integren a futuro en su labor docente (Doerr, 2007; Lingefjärd, 2013; Villarreal y Esteley, 2023).

Por su parte, los diseños curriculares para la formación inicial del profesorado de matemática en Argentina también reconocen la importancia y valor del uso de tecnologías y de tareas de modelización que permitan vincular la matemática con el mundo real extra-matemático (ver, por ejemplo, Ministerio de Educación de la Provincia de Córdoba, 2010). Sin embargo, la inclusión y el tratamiento de la modelización y las tecnologías en los planes de estudio de los Profesorados es variable. En esta conferencia se presenta una propuesta pedagógica que implica la modelización y las tecnologías digitales de manera sinérgica. Tal propuesta se ha implementado desde 2010 en el programa de formación de un Profesorado en Matemática para el nivel secundario de una universidad pública argentina, en el marco del curso denominado *Didáctica Especial y Taller de Matemática* (DM), que más adelante será descripto.

El Profesorado antes mencionado tiene una duración de 4 años y el 66% del plan de estudios está compuesto por cursos de matemática, uno de física y otro de computación, dictados por profesionales de matemática o física, mientras que el 34% restante consiste en cursos de carácter didáctico-pedagógicos, dictados por profesionales del campo de la pedagogía o de la educación matemática. Entre estos últimos cursos hay dos que resultan fundamentales para la formación de FP: por un lado, el ya mencionado DM y, por el otro, *Metodología y Práctica de la Enseñanza* (MyPE) en el cual FP realizan sus primeras prácticas docentes en escuelas secundarias. Estos espacios curriculares han sido escenarios en los que integrantes del GECyT-EM han investigado diferentes aspectos relacionados con: (1) FP que realizan tareas de modelización matemática (como modelizadores) en el curso de DM y (2) FP que diseñan e implementan tareas de modelización durante sus primeras prácticas docentes en escuelas secundarias, en el marco del curso MyPE. En ambos casos, fue posible observar que diversas tecnologías resultaron ser actores importantes durante el desarrollo de procesos de modelización, y entonces, el estudio del impacto de las tecnologías en tareas de modelización realizadas, diseñadas o implementadas por FP se convirtió en foco de nuevas investigaciones.

Esta conferencia presenta detalles de la propuesta pedagógica diseñada para el curso de DM y, en este marco, se muestran pormenores de experiencias de FP que desarrollaron proyectos de modelización matemática (MM) acompañados con diferentes tipos de tecnologías digitales (TD). En la siguiente sección se explicitan las perspectivas teóricas que sustentan tal propuesta pedagógica.

Perspectivas teóricas que sustentan la propuesta pedagógica

En esta sección, se presenta la perspectiva de modelización adoptada en el curso de DM y la perspectiva epistemológica que se sostiene respecto del uso de TD en la producción de conocimiento, y en la enseñanza y aprendizaje de la matemática.

La perspectiva de modelización adoptada se caracteriza por los siguientes principios:

- Carácter abierto de las actividades planteadas al estudiantado, sin conocimientos matemáticos predeterminados a ser enseñados.
- Carácter interdisciplinar del trabajo.
- Fomento de la reflexión sobre la matemática, los modelos creados y el papel social de la matemática y la MM.
- Dominio del proceso de modelización considerando todas las fases del ciclo.

Dado que no hay ningún contenido matemático previo que deba aprenderse a través de los proyectos de modelización, la atención se centra en la modelización como actividad matemática que merece ser enseñada y aprendida en sí misma. Los principios propuestos son compatibles con distintas perspectivas, tales como: la *modelización como contenido* (Julie y Mudaly, 2007), la *modelización activa* (Muller y Burkardt, 2007), la *perspectiva sociocrítica* de la MM discutida por autores brasileños (Araújo, 2012, 2009; Barbosa, 2006; Silva y Kato, 2012), o las ideas del trabajo con proyectos descriptas por Skovsmose (1994, 2001) en el marco de la educación matemática crítica.

En cuanto al uso de la tecnología, se adopta la idea de que el conocimiento es producido por colectivos de *humanos-con-medios* (Borba y Villarreal, 2005). La palabra medio se refiere a cualquier tipo de herramienta, dispositivo, equipo, instrumento, artefacto o material resultante de los avances tecnológicos. En este texto, interesan específicamente las TD que incluyen Internet, cualquier tipo de software matemático y lenguajes de programación.

La noción de *humanos-con-medios* está asociada a dos ideas principales. Una es que la cognición no es una empresa individual, sino social, razón por la cual el constructo incluye explícitamente a *humanos*, en plural. La otra idea clave es que la cognición incluye herramientas, *medios* con los que se produce el conocimiento. Este componente del sujeto epistémico no es auxiliar o complementario, sino esencial. Los medios son elementos constitutivos del conocimiento. La integración de las TD reorganiza el pensamiento y la producción de conocimiento. Esta reorganización puede implicar transformaciones en los ambientes educativos; por ejemplo, en el tipo de problemas que se pueden abordar, en las formas de resolverlos y en las maneras de validar y comunicar los resultados. Borba y Villarreal (2005) también exploraron la relación sinérgica entre modelización y tecnología, y autores tales como Greefrath (2011) y Doerr et al. (2017), entre muchos otros, se refieren al papel de las tecnologías en la modelización. Algunos ejemplos de la fuerte influencia de las TD en el desarrollo de proyectos de modelización abiertos en diferentes contextos educativos se pueden encontrar en Borba et al. (2016), Villarreal et al. (2010) y Villarreal et al. (2018).

Estas perspectivas teóricas relacionadas con MM y TD fundamentan la propuesta pedagógica que se describe en la próxima sección y que consiste en el montaje de un escenario de MM para la formación inicial de FP.

Un escenario de modelización matemática para la formación de FP

El abordaje de tareas de MM y el uso de TD en los planes de estudio de los profesorados de Argentina es variable. Sin embargo, en el contexto local, es posible observar que su inclusión en cursos disciplinares resulta tímida. Por un lado, los cursos de matemática dan poco o ningún margen para la modelización activa. Por otro lado, aunque las tecnologías están ganando terreno en el dictado de algunos cursos, suelen tener un papel suplementario, con escaso aprovechamiento de su potencial para favorecer el pensamiento y el aprendizaje matemático *con-tecnologías*. Esto representa un reto para la formación del profesorado.

A fin de cambiar esta situación en el contexto local, en 2010 se decidió crear un escenario de modelización matemática en el marco del curso regular de DM. Este curso está en el tercer año del programa de formación y dura 30 semanas con dos clases semanales de 4 horas. En él, se estudian varias tendencias en educación matemática, como la resolución de problemas, la educación matemática crítica, el uso de la tecnología y la MM.

Al estudiar la MM, se tratan las nociones de modelo y modelo matemático y se estudian las fases de un proceso de MM utilizando diferentes ciclos como los que se pueden observar en las Figuras 1 y 2, propuestos por Bassanezi (2002) y Blomhøj (2004), respectivamente.

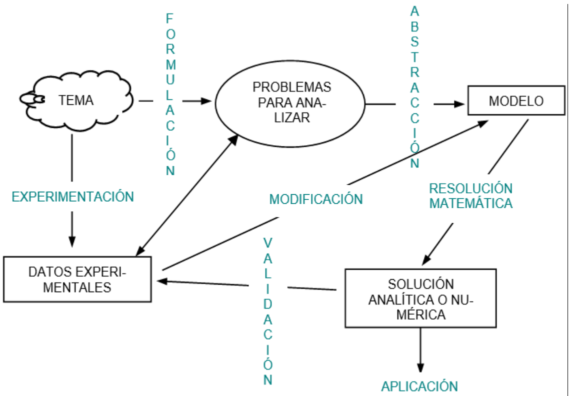


Figura 1: Ciclo de modelización adaptado de Bassanezi (2002, p. 27)

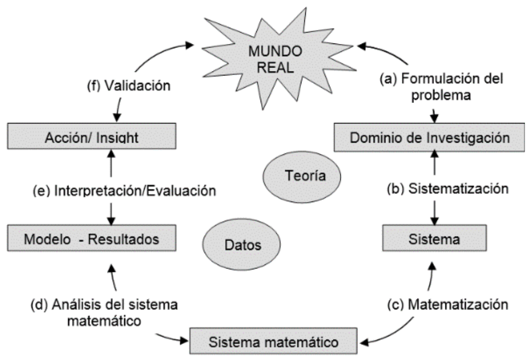


Figura 2: Ciclo de modelización propuesto en Blomhøj (2004, p. 148)

Durante las clases se analizan experiencias de modelización en diferentes contextos educativos y se resuelven varias tareas de modelización. Por último, se invita a los y las FP a desarrollar proyectos de modelización utilizando libremente TD, si así lo desean. Para ello, se les pide que formen pequeños grupos y seleccionen un tema (no matemático) del mundo real que sea de su interés, formulen problemas relacionados con este tema, seleccionen variables, planteen hipótesis, diseñen experimentos (si es necesario), busquen información, recojan y procesen datos y resuelvan los problemas. Cada grupo tiene que redactar un informe y hacer una presentación oral para toda la clase. Durante estas presentaciones, que duran unos 40 minutos, el resto de la clase hace preguntas y comentarios sobre los proyectos. En muchos casos, los y las FP discuten posibles tareas de modelización para la escuela secundaria, o reflexionan sobre el papel de la tecnología en el proceso de modelización.

Este escenario ofrece a los y las FP la oportunidad de experimentar un proceso completo de modelización abierta, siguiendo las fases del ciclo de modelización. Estas experiencias se han registrado de diferentes maneras: informes finales escritos por FP, notas de campo durante las clases, archivos GeoGebra, archivos de hojas de cálculo, códigos Python y videos de las presentaciones orales finales. Estas son las fuentes que permitieron desarrollar diferentes estudios en el periodo 2010-2020. Así, el escenario de modelización se convirtió en un escenario de investigación, en el que se analizaron, por ejemplo, los temas que FP seleccionaron para sus proyectos de modelización, las razones de dicha selección, los contenidos matemáticos utilizados y la relación con problemáticas sociales (Villarreal et al., 2015 y Villarreal, 2019).

Al centrarnos en la integración de las TD en los procesos de modelización, se buscó determinar qué tecnologías fueron utilizadas, para qué propósitos de modelización y en qué fases del proceso se emplearon significativamente. En Villarreal et al. (2018) se reporta que las tecnologías utilizadas fueron Internet, hojas de cálculo, software matemático y lenguajes de programación. Internet fue la tecnología más utilizada para buscar información o datos, seleccionar variables o formular problemas. Las otras tres tecnologías influyeron significativamente en los procesos de solución y validación matemática.

En el año 2020, primer año de la pandemia por COVID-19, tanto el curso de DM como el escenario de modelización se sostuvieron de manera remota. En la siguiente sección se describe la organización del curso de DM y del trabajo con proyectos de modelización, en modalidad a distancia.

DM y modelización matemática en el primer año de pandemia

El curso de DM

Entre marzo y noviembre de 2020, el curso de DM se impartió en modalidad remota; asistieron trece estudiantes y estuvo a cargo de tres profesoras. Se utilizó un aula virtual en la plataforma Moodle en la que se subían textos, tareas, videos, presentaciones PowerPoint de las clases, entre otros materiales. El aula virtual ya se venía utilizando desde años anteriores, pero adquirió mayor relevancia en el contexto de pandemia. Su uso se complementó con dos reuniones sincrónicas semanales a través de videollamadas.

El pasaje a la educación remota trajo consigo dificultades que pusieron de manifiesto las desiguales condiciones de acceso a la educación de los y las estudiantes del nivel universitario en esta emergencia sanitaria. Había estudiantes, y también docentes, que no disponían de buena conectividad en casa, o no tenían computadora con cámara o sólo podían conectarse a través de sus teléfonos móviles, con múltiples interrupciones y elevados costos de conexión a internet. Una estudiante y una de las profesoras tenían que ocuparse del cuidado de niños mientras estaban en clase.

La organización del trabajo con proyectos de MM

Los trece estudiantes del curso se dividieron en cuatro grupos: un grupo de cuatro miembros y tres grupos de tres miembros. La Figura 3 muestra una línea temporal con fechas y actividades realizadas durante el desarrollo de los proyectos de MM, desde la primera clase en la que se introdujo la MM como tendencia en la educación matemática, hasta la presentación del informe final escrito de cada grupo.

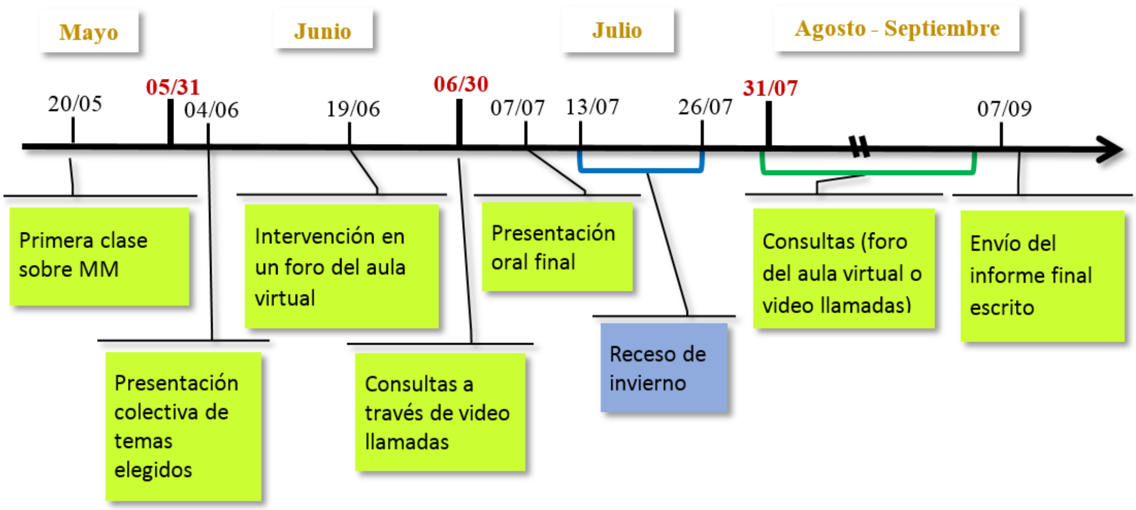


Figura 3: Cronograma del desarrollo de proyectos de MM

El momento de la presentación colectiva de los primeros temas elegidos por los grupos fue fundamental ya que, a partir del intercambio con colegas y profesoras, cada grupo decidió finalmente qué tema abordar. Después de este intercambio inicial, las actividades relacionadas con los proyectos de modelización fueron realizadas por los y las FP de forma autónoma en horarios extra-clases. Se creó un foro en el aula virtual Moodle y se solicitó una primera intervención sobre la marcha de los proyectos para el día 19 de junio. Cada grupo podía añadir un nuevo tema de discusión, siempre que lo necesitara, para enviar preguntas y recibir orientación de las profesoras. Previamente a la presentación oral final, cada grupo realizó consultas a través de videollamadas.

Las profesoras actuaron como guías que ayudaron a formular o reformular los problemas, informar sobre posibles fuentes de datos y sugerir nuevas preguntas para que los grupos se involucraran en procesos de modelización más complejos.

Las presentaciones orales finales de los grupos permitieron tener una visión de conjunto del estado de avance de cada proyecto. Tras estas presentaciones, los grupos de FP dispusieron de dos meses para completar el informe escrito, teniendo en cuenta todas las sugerencias y observaciones recibidas. Durante este periodo de dos meses, los grupos también realizaron consultas a través del foro o por videollamadas.

En la siguiente sección se presentan los cuatro proyectos de MM desarrollados en 2020.

Los proyectos de modelización desarrollados en 2020

En esta sección se informa brevemente sobre los proyectos de modelización desarrollados en 2020 por los cuatro grupos de FP, haciendo referencia a: los temas elegidos, el papel de las TD, los tipos de aprendizaje, y las dificultades y limitaciones reconocidas.

Los temas seleccionados

Elegir un tema para comenzar un proceso de MM puede ser una tarea difícil. Al principio, cada grupo propuso varios temas o un tema con varios interrogantes. La elección final se basó en la información disponible, los datos obtenidos, las presentaciones colectivas y las orientaciones de las profesoras, así como en los intercambios con colegas.

El **Grupo 1** consideró inicialmente cuatro posibles temas: (1) Juegos de lotería, (2), Bastones para ciegos (un estudiante del grupo es ciego), (3) Índice de masa corporal y (4) COVID-19. Tras el intercambio con profesoras y colegas, y teniendo en cuenta la cantidad de datos disponibles sobre COVID-19, el grupo decidió enfocarse en este tema. Las primeras preguntas eran amplias y difíciles de abordar en el tiempo disponible:

1. Dado un cierto conjunto de datos, ¿es posible predecir la evolución de esta enfermedad en Argentina?
2. Esta predicción tentativa, ¿podría compararse con una hipotética situación en la que no se hubieran tomado medidas de prevención sanitaria?
3. ¿Será posible realizar alguna cuenta que nos permita saber de alguna forma si estamos mejor, peor o igual en relación con el desarrollo de la enfermedad?

Estas preguntas eran muy ambiciosas y con el asesoramiento de las profesoras, el grupo decidió considerar sólo datos de su provincia (Córdoba) y hacer un modelo descriptivo de la situación, analizando los efectos de las medidas de restricción o flexibilización en el periodo de marzo a julio de 2020.

El **Grupo 2** consideró los siguientes temas: (1) Evolución de los precios para construir una vivienda de 2015 a 2019, (2) Causas de abandono de estudiantes de la facultad en la que estudian, (3) Basura electrónica en Córdoba, y (4) Feminicidios en Argentina.

El grupo consideró que el tema de feminicidios era más actual y enriquecedor para su modelización, con elementos de análisis interesantes. También reconoció la importancia de compartir los resultados de sus investigaciones como una forma de crear conciencia sobre la gravedad de este problema social.

Como en el caso del Grupo 1, los datos disponibles de distintas fuentes oficiales para el periodo 2014-2019 influyeron en la formulación de las preguntas que aquí se muestran:

1. ¿Existe una tendencia en la cantidad de feminicidios en Córdoba en el periodo que va desde 2014 a 2019?
2. ¿En qué provincia de Argentina se registró la mayor cantidad de víctimas en el periodo 2014-2019?
3. ¿Cómo es la distribución de la tasa de feminicidios en Argentina en el año 2019?

El **Grupo 3** propuso abordar un tema sobre tecnología y salud, centrado en la cantidad de tiempo que una persona pasa delante de una pantalla, teniendo en cuenta la situación de aislamiento debido a la pandemia de COVID-19. El grupo planteó la siguiente pregunta: ¿Cómo puede afectar el tiempo de pantalla a la salud de una persona durante este tiempo de cuarentena? Para responder a esta pregunta, se plantearon nuevas cuestiones:

1. ¿Cuánto tiempo pasa una persona por día frente a una pantalla?, ¿Y a la semana?, ¿Y durante el tiempo que llevamos de cuarentena?
2. ¿Se hace el mismo uso de pantallas durante un día de semana y un día de fin de semana?
3. ¿Para qué fines se utilizan los dispositivos?
4. ¿Qué efectos puede causar el exceso de horas en pantalla? ¿Todos los dispositivos afectan de igual manera?

El **Grupo 4** consideró los siguientes temas: (1) Impacto de la cuarentena en el acceso a la educación, (2) Violencia de género en Argentina a causa de la pandemia, (3) Disminución de la contaminación tras el aislamiento obligatorio, y (4) Producción de papas en Argentina.

El grupo finalmente eligió el primer tema, pero requirió una reformulación debido a su amplitud y complejidad. La decisión se basó en la disponibilidad de datos reales de una encuesta en línea sobre las condiciones de acceso a la tecnología de los estudiantes de primer y segundo año de la facultad en la que estudian. La encuesta había sido realizada por el Centro de Estudiantes para conocer las necesidades tecnológicas del estudiantado para continuar sus estudios durante la pandemia. El tema elegido finalmente fue el acceso a internet de estudiantes de primer y segundo año de la facultad durante la pandemia. La pregunta formulada por el grupo fue: ¿Cómo afecta la falta de acceso a internet a la deserción de los estudiantes de primer y segundo año de la facultad durante la pandemia?

En todos los grupos, la elección del tema y las preguntas de investigación fueron fuertemente influenciados por la pandemia y el confinamiento, y la gran cantidad de datos disponibles asociados a esta situación. Las discusiones colectivas con el resto de la clase durante las presentaciones iniciales también fueron un factor clave en la decisión final sobre los temas a abordar en cada proyecto.

Funciones de las tecnologías digitales

Las tecnologías más utilizadas en los proyectos de modelización fueron hojas de cálculo, GeoGebra e Internet. Se usaron hojas de cálculo para sistematizar datos en tablas, crear gráficos circulares o de barras y contar celdas utilizando las funciones FILTRO y CONTAR.SI para analizar respuestas de una encuesta. GeoGebra se utilizó para ajustar curvas a un conjunto de datos o representar datos en un sistema de coordenadas. Internet se utilizó para buscar información sobre los temas elegidos, ver conferencias sobre diferentes modelos matemáticos asociados con la propagación del coronavirus, ver tutoriales sobre cómo utilizar las funciones de la hoja de cálculo, acceder a sitios web oficiales para recopilar datos sobre cantidad de personas infectadas con coronavirus por día en Córdoba, o el número de feminicidios en Argentina en un período determinado.

Como habíamos observado en años anteriores (Villarreal et al., 2018), el uso de TD fue significativo en las fases de formulación del problema, abstracción y resolución matemática (ver fases en Figura 1).

Tipos de aprendizajes que se produjeron, según los y las FP

Los y las FP informaron de aprendizajes específicos relacionados con los temas seleccionados: concientización acerca de la complejidad de la situación sanitaria a causa del COVID-19, las diversas cuestiones asociadas a la violencia contra las mujeres y los feminicidios y la concientización sobre los efectos negativos del exceso de tiempo frente a la pantalla en la vista y la postura, así como recomendaciones para mitigarlos.

Los y las FP también destacaron su aprendizaje en torno al uso de algunas funciones de la hoja de cálculo para el tratamiento de datos de una encuesta y los comandos de GeoGebra para ajustar curvas.

En cuanto a la matemática y su uso, los y las FP afirmaron que, en el desarrollo de sus proyectos de modelización, la matemática fue una herramienta para leer la realidad. Aunque a veces la matemática utilizada fue simple, tenía una aplicación clara y cada índice o tasa que se calculaba tenía un significado. Un número podía representar una mujer muerta, una persona enferma, un estudiante que no tenía acceso a la educación o el indicador de que era necesario reducir el tiempo de exposición a la pantalla.

Los y las FP también señalaron que aprendieron habilidades estadísticas durante el proceso de MM. Por ejemplo, la creación de tablas de resumen a partir de un conjunto de datos, la selección de variables, la creación de categorías, la construcción de tablas de contingencia para analizar si había o no relaciones entre variables, y la interpretación de tablas.

En resumen, los y las FP identificaron aprendizajes en relación con cuatro ámbitos: temas abordados, uso de TD, matemática y empleo de la matemática para la lectura crítica y la comprensión del mundo. Estos aprendizajes evidencian una perspectiva de modelización sociocrítica en acción.

Dificultades y limitaciones

Una de las principales dificultades señaladas por los y las FP durante el proceso de modelización fue la imposibilidad de reunirse cara a cara para trabajar. Esto obstaculizaba la concertación de acciones y la toma de decisiones. Otra dificultad fue acordar horarios para realizar reuniones virtuales mediante videollamadas. Esto se complicaba debido a las diferentes responsabilidades y actividades de cada estudiante, y a la escasa conectividad a internet de algunos de ellos.

La imposibilidad de reunirse en persona conllevó situaciones como la vivida por miembros del Grupo 1 que trabajaba con COVID-19 y hacía uso de hojas de cálculo. Habían registrado en una tabla el número diario de nuevos infectados por coronavirus en

Córdoba y necesitaban calcular el número acumulado de infectados por día, como se muestra en la Figura 4.

FECHA.	NUEVOS INFECTADOS.	acumulad
2-mar	1	1
3-mar	1	2
4-mar	0	2
5-mar	1	3
6-mar	1	4
7-mar	0	4
8-mar	1	5
9-mar	1	6
10-mar	0	6
11-mar	1	7
12-mar	2	9
13-mar	5	14
14-mar	4	18
15-mar	3	21
16-mar	8	29
17-mar	9	38
18-mar	5	43
19-mar	13	56

Figura 4: Número de nuevos infectados por día y acumulado en la ciudad de Córdoba, entre el 2 y el 19 de marzo - 2020. Fuente: informe escrito del G1.

Hacer este cálculo en la hoja de cálculo es trivial, pero nadie en el grupo sabía cómo hacerlo. Uno de sus integrantes intentó hacer un código con Python, pero tuvo un error de programación y como era ciego y no podía reunirse con sus colegas del grupo, no pudo detectar el error para solucionarlo. Optaron por hacer los cálculos a mano, lo que resultó en mucho trabajo manual y pérdida de tiempo. El grupo informó que ninguno de sus integrantes era buen usuario de la hoja de cálculo.

En síntesis, la imposibilidad de reunirse presencialmente y la escasa conectividad fueron obstáculos importantes para el desarrollo de los proyectos de MM.

Además de las dificultades reconocidas por los y las FP, las profesoras responsables del curso de DM reconocieron algunas deficiencias en el programa de formación de profesores. El estudio de ecuaciones diferenciales está ausente y el estudio de la estadística descriptiva es muy limitado. Esto implicó limitaciones para trabajar con modelos de propagación de enfermedades o realizar análisis estadísticos más sofisticados.

Reflexiones finales

Autores como Doerr (2007), Niss et al. (2007), Blum (2015) y Gastón y Lawrence (2015) enfatizan la necesidad de que FP experimenten el proceso de MM en su formación inicial para incluirlo en su futura enseñanza. En línea con estos autores, Lingefjärd (2007, 2013) sugiere que la tecnología puede ampliar y mejorar estas experiencias.

Aunque lo aquí presentado es simplemente una descripción de las experiencias de MM de cuatro grupos de FP, es un ejemplo del tipo de trabajo que se puede realizar en un programa de formación de profesores en torno a la MM acompañada con TD.

Los proyectos de modelización llevados a cabo por FP y sus reflexiones, expresadas durante las presentaciones orales o escritas en el informe final, proporcionan pruebas de la variedad de temas abordados y su estrecha relación con la situación pandémica, la diversidad de tecnologías utilizadas, los logros de aprendizaje, las dificultades encontradas y las limitaciones reconocidas. Algunos estudiantes dieron sentido a la experiencia previendo posibles implicaciones para su futuro como profesores.

A pesar de las dificultades y limitaciones reportadas, las evidencias positivas que se han obtenido a lo largo de muchos años de experiencia permiten afirmar que la implementación de tareas de modelización abierta y el uso de tecnologías resultan imprescindibles en la formación inicial del profesorado ya que ofrecen oportunidades para:

- mejorar el aprendizaje en cualquier nivel del sistema educativo.
- contribuir a que la matemática sea considerada una herramienta útil para describir y analizar problemas reales, tomar decisiones fundamentadas y criticar situaciones con argumentos sólidos.
- sensibilizar a los futuros profesores y profesoras hacia las distintas formas de dar sentido a la matemática.

Por último, cabe señalar que, si bien es cierto que este tipo de experiencias son valiosas para los y las FP, la implementación de tareas abiertas de MM como las aquí descritas, en el contexto de la educación secundaria, supone un reto importante para profesores, profesoras y estudiantes. En este sentido, el estudio del diseño e implementación de tareas abiertas de MM en aulas de educación secundaria también ha sido un tema de investigación por parte de integrantes del GECyT-EM. Estos estudios llevan permanentemente a repensar los principios que caracterizan nuestra perspectiva de modelización y a reflexionar sobre diferentes formas de trabajar la MM y el uso de TD en la formación de profesores de matemática. Cada año y cada grupo de FP presenta nuevos desafíos para la docencia y la investigación.

Referencias bibliográficas

Araújo, J. L. (2009). Uma abordagem sócio-crítica da modelagem matemática: a perspectiva da educação matemática crítica. *ALEXANDRIA*, 2, 55-68.

Araújo, J. L. (2012). Ser crítico em projetos de modelagem em uma perspectiva crítica de educação matemática. *Boletim de Educação Matemática*, 26, 839-859.

Barbosa, J. C. (2006). Mathematical modeling in classroom: A critical and discursive perspective. *ZDM Mathematics Education*, 38(3), 293–301.

Bassanezi, R. (2002). *Ensino-aprendizagem com modelagem matemática: uma nova estratégia.* São Paulo: Contexto.

Blomhøj, M. (2004). Mathematical modeling - A theory for practice. In: B. Clarke, D. Clarke, G. Emanuelsson, B. Johnansson, D. Lambdin, F. Lester, A. Walby & K. Walby (Eds.), *International Perspectives on Learning and Teaching Mathematics*, (pp. 145-159). National Center for Mathematics Education.

Blum, W. (2015). Quality teaching of mathematical modeling: What do we know, what can we do? In: S. Cho (Ed.), *The Proceedings of the 12th International Congress on Mathematical Education* (pp. 73-96). Cham: Springer.

Borba, M. & Villarreal, M. (2005). *Humans-with-media and the reorganization of mathematical thinking: Information and communication technologies, modeling, experimentation and visualization*. 1. ed. New York, USA: Springer.

Borba, M., Villarreal, M. & Soares, D. (2016). Modeling using data available on the Internet. In: C. Hirsch & E. McDuffie (Eds.), *Annual perspectives in mathematics education 2016: Mathematical modeling and modeling mathematics* (pp. 143–152). NCTM.

Clark-Wilson, A, Robutti, O. & Sinclair, N. (Eds.) (2014). *The Mathematics Teacher in the Digital Era. An international perspective on technology focused professional development*. Springer.

Doerr, H. (2007). What knowledge do teachers need for teaching mathematics through applications and modeling? In: W. Blum, P. Galbraith, H-W. Henn, & M. Niss (Eds.), *Modeling and applications in mathematics education* (pp. 69-78). New York: Springer.

Doerr, H., Ärlebäck, J. & Misfeldt, M. (2017). Representations of modeling in mathematics education. In: G. Stillman, W. Blum & G. Kaiser (Eds.), *Mathematical modeling and applications: Crossing and researching boundaries in mathematics education* (pp. 71–82). Springer.

Gastón, J. & Lawrence, B. (2015). Supporting teachers' learning about mathematical modeling. *Journal of Mathematics Research*, 7(4), 1–11.

Greefrath, G. (2011). Using technologies: new possibilities of teaching and learning modeling – Overview. In: G. Kaiser, W. Blum, R. Borromeo Ferri, G. Stillman

(Ed.). *Trends in the teaching and learning of mathematical modeling* (pp. 301-304). New York: Springer.

Julie, C. & Mudaly, V. (2007). Mathematical modeling of social issues in school mathematics in South Africa. In: W. Blum, P. Galbraith, H. Henn, & M. Niss (Eds.), *Modeling and applications in mathematics education—The 14th ICMI Study* (pp. 503–510). New York: Springer.

Lingefjärd, T. (2007). Modeling in teacher education. In: W. Blum, P. Galbraith, H-W. Henn, & M. Niss (Eds.), *Modeling and applications in mathematics education* (pp. 475–482). New York: Springer.

Lingefjärd, T. (2013). Teaching mathematical modeling in teacher education: Efforts and results. In: X.-S. Yang (Ed.), *Mathematical modeling with multidisciplinary applications* (pp. 57–80). Hoboken, NJ: John Wiley & Sons, Inc.

Ministerio de Educación de la Provincia de Córdoba (2010). *Diseño curricular de la Provincia de Córdoba. Profesorado de educación secundaria en Matemática*. Accessed 25 Feb 2022.

Muller, E. & Burkhardt, H. (2007). Applications and modeling for mathematics. In: Blum, W.; Galbraith, P; Henn, H.; Niss, M. (Ed.). *Modeling and applications in mathematics education - The 14th ICMI Study* (pp. 267-274). Springer.

Niss, M., Blum, W. & Galbraith, P. (2007). Introduction. In: W. Blum, P. Galbraith, H-W. Henn, & M. Niss (Eds.), *Modeling and applications in mathematics education* (pp. 3-32). New York: Springer.

Silva, C. D. & Kato, L. A. (2012). Quais elementos caracterizam uma atividade de modelagem matemática na perspectiva sociocrítica? *Boletim de Educação Matemática*, 26, 817-838.

Skovsmose, O. (1994). *Towards a philosophy of critical mathematics education*. Kluwer.

Skovsmose, O. (2001). Landscapes of investigations. *ZDM. Mathematics Education*, 33(4), 123-132.

Villarreal, M., Esteley, C. & Mina, M. (2010). Modeling empowered by information and communication technologies. *ZDM Mathematics Education*, 42(3–4), 405-419.

Villarreal, M., Esteley, C. & Smith, S. (2015). Pre-service mathematics teachers' experiences in modeling projects from a socio-critical modeling perspective. In: G. Stillman, W. Blum & M. Biembengut (Eds.), *Mathematical modeling in education research and practice: Cultural, social and cognitive influences* (pp. 567–578). Springer.

Villarreal, M., Esteley, C. & Smith, S. (2018). Pre-service teachers' experiences within modeling scenarios enriched by digital technologies. *ZDM. Mathematics Education*, 50(1-2), 327-341.

Villarreal, M. (2019). Experiencias de modelización en la formación de futuros profesores de matemática. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, Año 14, N.18, 227-242.

Villarreal, M. & Esteley, C. (2023). Researching professional trajectories regarding the integration of digital technologies: the case of Vera, a novice mathematics teacher. En A. Clark-Wilson, O. Robutti & N. Sinclair (Eds.). *The Mathematics Teacher in the Digital Era* (pp. 323-346). Springer.

Diferencias en la evaluación de los docentes de secundaria y las pruebas PISA

Elvas, I.[1], Ramírez, R.[2], Flores, P.[3]

[1] isabelelvas@correo.ugr.es. Universidad de Granada. Uruguay.

[2] rramirez@ugr.es. Universidad de Granada. España.

[3] pflores@ugr.es. Universidad de Granada. España.

Tema: evaluación en geometría

Modalidad: comunicación breve

Nivel educativo: secundaria

Resumen: *Presentamos parte de una investigación educativa sobre las evaluaciones escritas que realizan los docentes en el aula y las propuestas liberadas por PISA. Buscamos medir el aprendizaje geométrico y ver cómo reflejan el aprendizaje del sentido espacial los estudiantes de 15 años que cursan primer año de bachillerato en Uruguay. A través del análisis de contenido se consideraron las características destacables de las actividades como: contexto, datos del enunciado, tipología y complejidad; y la componente del sentido espacial relativa al manejo de conceptos geométricos que se desarrollan e intervienen para su resolución. Se identificaron las exigencias en las actividades de aula referidas a lugares geométricos, con objeto de comprender qué diferencias y similitudes tienen con las actividades de PISA para el contenido espacio y forma. Se concluye que las evaluaciones escritas de los docentes uruguayos no son sustancialmente diferentes de las actividades propuestas en las mediciones de PISA. El manejo de los conceptos geométricos es utilizado para resolver todas las actividades propuestas. Si bien se diferencian en la formulación, presentación del enunciado y el contexto, y en los niveles de complejidad.*

Palabras claves: *evaluación, evaluaciones escritas, sentido espacial, componentes del sentido espacial.*

Introducción

Los investigadores, Diezmann y Lowrie (2009), consideran la alfabetización espacial y el desarrollo de las habilidades espaciales, como aprendizajes fundamentales en el mundo tecnológico en el que vivimos. Además, Santos y Cai (2018) afirman que tanto el currículo como la evaluación son dos dimensiones relevantes en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

En relación con el manejo de conceptos geométricos, algunos investigadores (Fernández, 2013; Presmeg, 2006) consideran una línea de interés el vínculo y la interacción entre las representaciones externas e internas. Se las considera parte fundamental de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Con el fin de favorecer el éxito de los aprendizajes de los estudiantes es un desafío mejorar la interacción y coherencia entre la evaluación a gran escala y en el aula (Suurtamm et al., 2016).

La investigación que se describe estuvo centrada en la evaluación escrita en matemáticas, en particular en geometría, en dos tipos de pruebas, las propuestas por PISA y las de los docentes de aula. En ambas se atiende al sentido espacial requerido para resolverlas, en los estudiantes de 15 años que en su mayoría cursan primer año de bachillerato uruguayo.

En relación con el desarrollo del sentido espacial, el National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) (2000), enfatiza el aprendizaje geométrico, con ello propone que cada estudiante deba "utilizar la visualización, el razonamiento espacial y el modelado geométrico para resolver problemas" (p.43).

A su vez, New Jersey Mathematics Coalition (1996) afirma que "todos los estudiantes desarrollarán el sentido espacial y la capacidad de usar propiedades y relaciones geométricas para resolver problemas en matemáticas y en la vida cotidiana" (p.209).

Mientras que la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económicos (OCDE) en el proyecto PISA (Programme for International Student Assessment), considera los contenidos propuestos en los estándares curriculares de NTCM (2000) y en geometría define el contenido espacio y forma, relaciona el estudio de las formas con el espacio cercano y su construcción conceptual.

La OCDE promueve políticas educativas y se vale de PISA para evaluar los programas educativos de los países participantes. Para ello contrasta si las competencias desarrolladas por los estudiantes de 15 años de los diferentes países le permiten participar en la sociedad del saber y resolver problemas de la vida adulta. Los instrumentos de evaluación propuestos se refieren a cuestiones tales como los contenidos que deben adquirir los alumnos, los procesos que deben ser puestos en marcha o el contexto en el que los conocimientos y las competencias serán aplicados.

En el informe PISA 2012 se comunica en qué medida los estudiantes que finalizan la educación media básica, "han adquirido los conocimientos y desarrollado las habilidades que son esenciales para la plena participación en la sociedad" (ANEP, 2013, p.13). Las actividades de PISA requieren desarrollar el razonamiento espacial para ser superadas, que en el contenido espacio y forma, implica: reconocer patrones y figuras, buscar diferencias y semejanzas entre los componentes de las formas, entender las propiedades y las posiciones relativas de los objetos geométricos; y buscan evaluar la capacidad de los estudiantes para resolver problemas de la vida cotidiana.

La enseñanza de la geometría en Uruguay, según se explicita en los programas oficiales propuestos por el Consejo de Educación Secundaria (CES), se desarrolla en forma progresiva, se avanza a partir de lo enseñado en el año anterior. Así, primer año de bachillerato, en geometría está centrado en el método de los lugares geométricos y utiliza los conocimientos aprendidos en primaria y en ciclo básico. Para el tratamiento de otros temas, se mencionan los conceptos de "circunferencia, círculo, mediatriz, bisectriz y elementos notables de un triángulo" (CES, 2010, p.2). Prevalece el cuidado por "la expresión matemática correcta" (CES, 2010, p.2) en relación con el algoritmo de resolución.

Los diferentes aspectos que son trabajados en los cursos de geometría en los currículos oficiales de la enseñanza secundaria uruguaya enfatizan los conceptos geométricos, las propiedades de las figuras y su correspondiente formalización. Los docentes se basan en algunos documentos nacionales que entienden la evaluación como: "una herramienta pedagógica en la que la valoración conceptual, junto con la calificación pertinente, motiva a los estudiantes a seguir aprendiendo" (CES, 2020, p.2); "permite dilucidar, objetivar y establecer apreciaciones acerca de los procesos de aprendizaje" (ANEP, 2017, p. 27).

Mientras que en PISA 2012, el puntaje promedio obtenido en matemáticas por Uruguay fue 409 puntos, algo menor que en las mediciones anteriores. Esto significa que el estudiante promedio accede al nivel 1 de desempeño, el más bajo de los seis niveles definidos, así es capaz de responder a preguntas que están bien definidas y que involucran contextos familiares donde la información está toda presente (ANEP, 2013).

El 44,3 % de estudiantes accede al menos al nivel 2, considerado como el "umbral de competencia" es decir el nivel básico de competencias en las áreas evaluadas. Por tanto, el 55,7% de estudiantes uruguayos se ubican en el nivel 1 o bajo el nivel 1(que corresponde a un séptimo nivel). A su vez si miramos los resultados en el contenido espacio y forma el puntaje obtenido por Uruguay es 413 siendo el mejor puntaje promedio por área de contenido. En la tabla 1, se muestra la distribución de porcentajes en los niveles, obtenidos en PISA 2012, destacando el contenido espacio y forma.

	Nivel bajo 1	Nivel 1	Nivel 2	Nivel 3	Nivel 4	Nivel 5	Nivel 6
Espacio y forma (%)	28,5	25,5	22,6	14,8	6,7	1,6	0,3

Tabla 1. Contenido espacio y forma: porcentaje de estudiantes por nivel de desempeño en Uruguay PISA 2012

Por lo dicho, se puede observar cierta diferencia de énfasis entre la enseñanza de la geometría que promueve el currículo uruguayo y el enfoque que pretende desarrollar el sentido espacial propuesto por el NCTM y la OCDE a través de los lineamientos de PISA.

Pues bien, es interés del estudio la diferencia entre los fines que persiguen las evaluaciones en geometría propuestas por los docentes de aula en Uruguay y los fines de las evaluaciones propuestos por el NCTM (1989) y por la OCDE en PISA. Además, brindar elementos concretos que muestren diferencias y similitudes entre las actividades propuestas en las evaluaciones realizadas a los estudiantes tanto en el aula como en las pruebas PISA, señalando específicamente aquellas enfocadas a apreciar el sentido espacial.

A partir de los intereses planteados se realizan las siguientes preguntas: ¿qué componentes del sentido espacial se evidencian mayormente al resolver las actividades correspondientes al contenido geométrico de 1º de bachillerato para alumnos de 15 años, en las evaluaciones escritas de algunos docentes de matemáticas y en las evaluaciones PISA del contenido, espacio y forma? ¿Qué aspectos son comunes y en cuáles difieren las actividades planteadas por PISA de las propuestas por los docentes en el aula?

El aporte de este trabajo a las investigaciones actuales pretende brindar información acerca de las diferencias y semejanzas entre las actividades de evaluación propuestas por algunos docentes de secundaria y las actividades de las evaluaciones de PISA, referidas al contenido, espacio y forma; y conocer el manejo de conceptos geométricos, uno de los componentes del sentido espacial, que deben desarrollar los estudiantes para resolverlas.

Marco teórico

Para dar respuesta a las preguntas de investigación se caracterizan actividades atendiendo al contenido, los aprendizajes y destrezas requeridos para resolverlas; y desarrollamos aspectos teóricos referidos a dos elementos: sentido espacial y actividades de evaluación en matemáticas.

Evaluación en geometría

Los investigadores entienden que no es muy alto el número de estudios centrados en la evaluación, si bien la consideran como una dimensión importante en el proceso de enseñanza y aprendizaje (Santos y Cai, 2018).

La evaluación en geometría. Alsina et al., (1997), consideran que para conocer el proceso de aprendizaje y maduración de los conceptos y relaciones geométricas se necesitan diseñar diferentes métodos y técnicas de evaluación. El NCTM (2000), por su parte, plantea que el estudio de la geometría debe permitir a los estudiantes utilizar el razonamiento espacial, la visualización y el modelado geométrico para resolver problemas y la evaluación en geometría propone entre otros aspectos, analizar características y propiedades de formas geométricas y desarrollar argumentos matemáticos sobre relaciones geométricas.

Para referirnos a ***las características de las actividades de evaluación*** consideramos cuatro componentes: el contexto, el enunciado, la tipología y la complejidad de las tareas. Los *contextos* que Caraballo et al. (2011) utilizan coinciden con los cuatro de PISA: contextos personales, educativos u ocupacionales, de orden público o científico. Por su parte Arévalo (2009) en relación con la comprensión de los *enunciados* en problemas matemáticos utiliza tres formas diferentes: texto, esquemática y aritmética. Nos valemos de la distinción de *tipología* de Castro y Ruiz (2015) para establecer la diferencia entre ejercicio y problema. Los niveles de *complejidad* cognitiva utilizados por PISA (ANEP, 2004) son tres: reproducción, conexión y reflexión.

Sentido espacial

Las continuas investigaciones en educación de la geometría han abarcado el pensamiento y razonamiento espacial y un aspecto que ha recibido mucha atención son los aspectos visuales en geometría (Jones y Tzekaki, 2016) y la relación positiva con la resolución de problemas (Stylianou, 2001). En esta línea el concepto de sentido espacial sugiere la aplicación de la geometría a la resolución de problemas de la vida cotidiana.

Por su parte Flores et al. (2015) describen el sentido espacial como una forma intuitiva de “entender el plano y el espacio, para identificar cuerpos, formas y relaciones entre ellos, que implica manejar relaciones y conceptos de geometría de forma no convencional” (p.129). Caracterizan la visualización, compuesta por cuatro elementos: las imágenes mentales, las representaciones externas, los procesos de visualización y las habilidades de visualización (Gutiérrez,1996).

En este trabajo se pondrá el foco en el manejo de conceptos geométricos, por su papel relevante en la resolución de tareas (Flores et al., 2015), que se describen a continuación.

Manejo de conceptos geométricos. Consideran que el manejo de conceptos geométricos está compuesto por algunos apartados: *conocer formas y figuras*, que implica identificarlas, definirlas, construirlas y caracterizarlas; *reconocer y establecer relaciones geométricas*, que consiste en apreciar cualidades de las formas y los cuerpos geométricos; *la ubicación y los movimientos* como la capacidad para situar los elementos en el espacio y en el plano, realizar movimientos e identificar elementos invariantes y regularidades; y *la orientación espacial* entendida como la capacidad para comprender cómo se disponen los elementos en el espacio y no confundirlos. La mayor fortaleza del sentido espacial consiste en la conexión entre las componentes como se expresa en la figura 1.

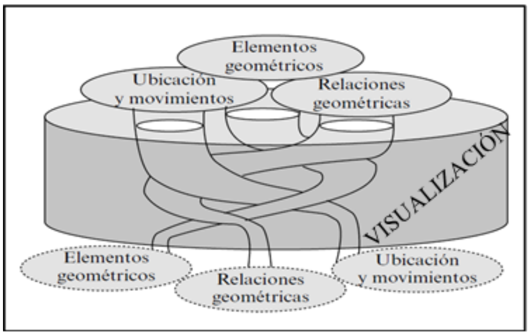


Figura 1. Conexión entre los conceptos geométricos. (Flores et al., 2015, p.134)

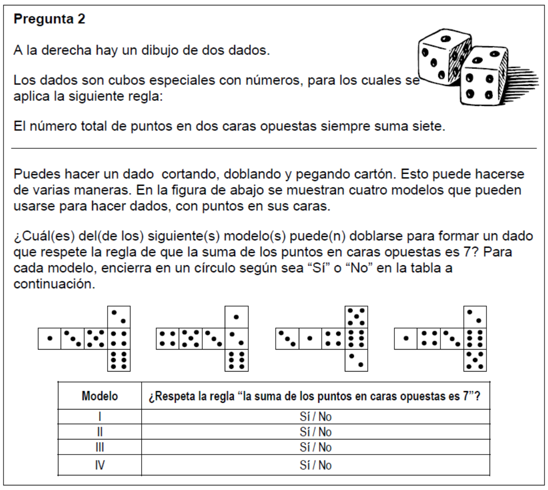
Metodología

La investigación se caracteriza por el enfoque cualitativo de carácter descriptivo y su diseño metodológico corresponde a un análisis de contenido que estudia el significado e interpretación de un mensaje y permite analizar el contenido latente en un texto

(Krippendorff. 1990). En educación matemática, se emplea como método para investigar los diversos significados escolares de los conceptos y procedimientos matemáticos que aparecen en un texto (Rico, 2013), en nuestro caso en las evaluaciones escritas de los docentes y las estandarizadas que ofrece PISA.

La selección y recolección de ***las actividades analizadas en este estudio*** implica dos procesos. La recolección de las actividades liberadas por PISA en 2003 y 2012, mediciones en las que Uruguay participa y el dominio es la cultura matemática. La recolección y selección de las actividades de aula de 1º de bachillerato, en ese nivel se encuentran la mayoría de los alumnos con 15 años, corte etario de la evaluación de PISA.

Las actividades liberadas de PISA, referidas al contenido espacio y forma son sólo siete. Las tres de 2003 llevan por título: escalera, dados y carpintero (ANEP, 2004); y las correspondientes a 2012 son cuatro: garaje (pregunta 1 y 2) y puerta giratoria (pregunta 1 y 2) (ANEP, 2013). Las nombramos con las iniciales y números de sus títulos, **E, D, C, G1, G2, PG1, PG2**, respectivamente. En la figura 2 se presenta la actividad de los dados.



Pregunta 2

A la derecha hay un dibujo de dos dados.

Los dados son cubos especiales con números, para los cuales se aplica la siguiente regla:

El número total de puntos en dos caras opuestas siempre suma siete.

Puedes hacer un dado cortando, doblando y pegando cartón. Esto puede hacerse de varias maneras. En la figura de abajo se muestran cuatro modelos que pueden usarse para hacer dados, con puntos en sus caras.

¿Cuál(es) del(de los) siguiente(s) modelo(s) puede(n) doblarse para formar un dado que respete la regla de que la suma de los puntos en caras opuestas es 7? Para cada modelo, encierra en un círculo según sea "Sí" o "No" en la tabla a continuación.

Modelo	¿Respeta la regla "la suma de los puntos en caras opuestas es 7"?
I	Sí / No
II	Sí / No
III	Sí / No
IV	Sí / No

Figura 2. Dados. Actividad PISA 2003

Para la recolección de las actividades de aula, en 1º de bachillerato se seleccionan las actividades de evaluación correspondientes al contenido curricular de geometría, por tanto, actividades que evaluarán el aprendizaje de los lugares geométricos (CES, 2010).

Se solicita a la dirección de una institución privada del centro de Montevideo el acceso a las evaluaciones realizadas por los cuatro profesores de 1º de bachillerato del año lectivo 2020. Las actividades de aula fueron planteadas en un período de clase en modalidad presencial y corresponden al contenido referente a lugares geométricos (CES, 2010).

Nuestro interés está en el sentido espacial, evitando las inclusiones de aspectos relacionados con la medida de magnitudes geométricas, así para la selección se tuvo en cuenta que la solución de la actividad no fuera una medida, sea como cantidad de longitud, superficie o volumen, como de amplitud de ángulo. Además, se selecciona solo una de las que teniendo igual enunciado, cambian los valores de los datos proporcionados. Se tiene acceso a 24 actividades de evaluación de aula y son nueve las seleccionadas. Las nombramos con la inicial de la palabra actividad seguida de un número: **A1, A2, A3, A4, A5, A6, A7, A8 y A9.** Un ejemplo de las actividades de aula se muestra en la figura 3.

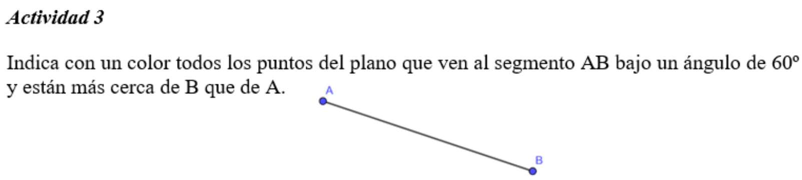


Figura 3. Actividad de aula

En síntesis, las actividades de evaluación consideradas como sujetos de análisis en este estudio son 16. Las siete actividades liberadas de PISA en 2003 y 2012 con dominio la cultura matemática, en el contenido espacio y forma y las nueve actividades de aula en torno al contenido lugares geométricos, propuestas por docentes de 1º de bachillerato.

La producción de datos. El trabajo abarca dos tipos de dimensiones de estudio: características de las actividades, y componentes del sentido espacial requeridos para resolverlas. Para la primera dimensión se examinan las características de los enunciados y los procesos de resolución de las actividades. Mientras que para las componentes del sentido espacial se realiza la resolución amplia y detallada por parte de los investigadores, de cada una de las 16 actividades sujetos del estudio. Las resoluciones fueron sometidas a la mirada de una persona experta y cualificada que permitió agregar nuevas resoluciones.

Los procedimientos que no conducen a encontrar la solución de las actividades no fueron considerados porque no atienden a los objetivos del estudio. Los alumnos de 1º de bachillerato resuelven a lápiz y papel las actividades de los docentes de aula, no fueron propuestas para ser resueltas por medio de programas de geometría, como GeoGebra.

Determinación de las categorías de análisis. Las categorías de análisis buscan ajustarse a los objetivos planteados. Una de las categorías atiende las características destacables de las actividades. En relación con la componente del sentido espacial, este trabajo se limita a una categoría, el manejo de los conceptos geométricos, si bien en la investigación original también se considera, las habilidades de visualización.

Para cada una de las categorías se establecen las subcategorías que fueron descritas y definidas en el marco teórico. Para la categoría, características destacables de las actividades, se plantean subcategorías: contexto, tipología, forma del enunciado y nivel de complejidad. Mientras que para la categoría manejo de conceptos geométricos se definen cuatro subcategorías: conceptos de las figuras, propiedades de las formas, relaciones geométricas, ubicación y movimientos, y orientación espacial.

Descripción del análisis. El análisis se realiza a partir de las diferentes resoluciones de las 16 actividades que forman parte de esta investigación. La mirada está puesta en identificar en cada paso de la resolución, los componentes del sentido espacial requeridos al estudiante de 1º de bachillerato en el momento que las resuelve.

Para todas las actividades se confeccionan tablas, corresponde a este estudio sólo las referidas a las dos categorías, características de las actividades y manejo de conceptos geométricos, con sus correspondientes subcategorías. Los análisis fueron puestos en consideración, recibieron agregados y correcciones de parte de dos docentes externos.

Resultados

Para la presentación de los resultados se elaboran dos tablas que sintetizan la información acerca de las características de las actividades (ver tabla 2) y el manejo de conceptos geométricos (ver tabla 3), que fueron definidos en el marco teórico.

Características de las actividades de PISA. La tabla 2 sintetiza la información acerca de las características que presentan las actividades liberadas por PISA. En relación con *el contexto*, cuatro de las actividades propuestas se presentan en un contexto laboral, dos en un contexto científico y solo una se considera en un contexto personal. Los datos brindados en *el enunciado* de la actividad, todas se clasifican en forma esquemática dado que en los esquemas, diseños o dibujos se brinda información relevante para la resolución y en tres de las actividades en su esquema se agregan datos irrelevantes; una de las tareas además se categoriza en forma de texto porque proporciona datos relevantes para la solución, las otras donde hay texto, lo datos no son relevantes.

Actividad	Contexto	Datos del enunciado	Tipología de tarea	Complejidad
C	Laboral	Esquemática	Problema	Conexión

E	Laboral	Esquemática con datos irrelevantes.	Ejercicio	Reproducción
D	Personal	Texto. Esquemática.	Problema	Conexión
G1	Laboral	Texto irrelevante. Esquemática.	Problema	Conexión
G2	Laboral	Esquemática con datos irrelevantes.	Problema	Reflexión
PG1	Científico	Esquemática con datos irrelevantes.	Problema	Reflexión
PG2	Científico	Texto irrelevante. Esquemática.	Problema	Reflexión

Tabla 2. Características en actividades de PISA

En relación con *la tipología* de tarea, seis actividades se consideran problemas porque le implican un reto al estudiante, para encontrar la solución debe examinar procedimientos que no le son accesibles, sólo una es considerada un ejercicio porque el estudiante conoce un método para encontrar la solución. Mientras que, con relación a *la complejidad cognitiva*, tres de las actividades, se consideran en niveles de conexión, en tanto que exigen resolver problemas no rutinarios, algunas de ellas tienen una mayor demanda de interpretación de los datos; otras tres exigen un nivel de reflexión en tanto que se precisa deducir los elementos para acceder a la resolución; en una de las actividades la complejidad es de reproducción, se emplea un algoritmo conocido, la división, para encontrar la solución.

Manejo de conceptos geométricos en las actividades de PISA. Todas las actividades requieren en su resolución conocer conceptos de algunas figuras geométrica en dos y tres dimensiones tales como triángulo, rectángulo, paralelogramo, cubo, prisma, ángulos, distancia y medida entre otros. A la vez requieren del empleo de las propiedades de las formas tales como perímetro, área y teorema de Pitágoras. En todas están implicadas las relaciones geométricas tales como paralelismo entre lados y entre planos, perpendicularidad entre lados y entre planos, amplitud de un sector de circunferencia y ángulos entre otras. La ubicación y los movimientos se requieren en cuatro actividades, mientras la orientación se emplea en cinco de las siete actividades.

Características de las actividades de aula. Se sintetiza la información de las características de las nueve actividades de aula que los docentes consideran al momento de proponer una evaluación en geometría. En relación con *el contexto*, todas las actividades son propuestas en un contexto científico en tanto que presentan situaciones abstractas. *El enunciado* de todas las actividades se caracteriza por la forma de texto, un texto breve que sólo contiene información relevante; cuatro de ellas presentan forma esquemática sobre la que se debe trabajar para resolverlas; además en todas las actividades, la información brindada es necesaria, no hay datos irrelevantes.

Con relación a *la tipología* de tarea, todas las actividades se consideran problemas, el estudiante debe examinar los procedimientos que dispone y combinarlos, en ningún caso con un solo procedimiento es suficiente, además debe hacer trazados con regla y compás para arribar a la solución. La *complejidad cognitiva* que presentan todas las actividades es de un nivel de conexión. Exigen establecer relaciones entre la información brindada y los datos requeridos para reconocer los lugares geométricos que le fueron presentados en el curso. En el enunciado se presentan diferentes elementos que permiten reconocerlos, además exige conocer los procedimientos para obtenerlos. Tal vez el más sencillo de identificar por sus elementos sea la circunferencia y el más complejo el arco capaz.

Manejo de los conceptos geométricos en las actividades de aula. Todas las actividades de aula son de construcción geométrica, requieren conocer conceptos de lugares geométricos: circunferencia, círculo, mediatriz, bisectriz, paralelas, paralela media y arco capaz, además de distancia, medida, ángulos, triángulos, paralelogramos y trapecios entre otros.

Propiedades de las formas. Todas estas actividades requieren del empleo de las propiedades que cumplen todos los puntos del plano que están en los respectivos lugares geométricos, por ejemplo, la equidistancia entre rectas exige pensar en distancias como medida de segmentos perpendiculares a ambas rectas, trazados desde cada punto de estas para obtener la paralela media o la bisectriz.

Relaciones geométricas. En la resolución de las actividades están implicadas las relaciones geométricas, todas las soluciones requieren interceptar lugares geométricos. Identificar los puntos que cumplen dos condiciones a la vez que no aparecen en el enunciado. Buscar los puntos que se encuentran, más cerca de un punto que de otro y en un arco capaz. A3 es una de las actividades de aula con menor habilidades espaciales requeridas.

Ubicación y movimientos. La ubicación y los movimientos se requieren en ocho de las nueve actividades. Algunos ejemplos de los conocimientos requeridos son: establecer posiciones relativas de segmentos de bisectrices en relación con un círculo, asociar la medida de la altura de un triángulo a la distancia entre rectas paralelas y la distancia del circuncentro a un vértice como el radio de una circunferencia con centro el vértice.

Orientación. Cinco de las nueve actividades requieren orientación para determinar la solución, las que solicitan construir triángulos y trapecios, ya que encontrar los vértices exige la intersección de dos lugares geométricos que, en general, tiene más de un punto en la solución, de ese modo se tiene que seleccionar qué punto obtenido se corresponde con qué vértice de la figura solicitada.

Diferencias y semejanzas en las características. Se profundiza en algunas semejanzas y diferencias que se han encontrado en las características de las actividades de evaluación en geometría propuestas en el aula y en PISA. En cuanto a *los contextos*, se podría generalizar que las actividades de PISA del estudio se contextualizan en situaciones laborales, mientras las de aula son en contextos científicos.

En atención a los datos del *enunciado*, todas las actividades salvo en tres de las propuestas por PISA presentan medidas en sus datos. La diferencia está en las respuestas solicitadas, son cuatro las actividades de PISA que solicitan una medida por respuesta; mientras que en las actividades de aula las medidas son una mediación para la construcción solicitada. Otra diferencia es la aparición en los enunciados de PISA de datos irrelevantes mientras que en las actividades de aula todos los datos son necesarios para obtener la solución.

En relación con *la tipología* de tarea, la mayoría de las actividades analizadas se corresponden con ser un problema, sin embargo, es oportuno señalar que las estrategias para encontrar la solución son diversas. Tres de las siete actividades de PISA requieren identificar respuestas, mientras que en todas las actividades de aula se requiere construir, la solución se obtiene si se conocen los procedimientos y si se logran los trazados.

En cuanto al nivel de *complejidad cognitiva*, son sólo tres de las 16 actividades analizadas en el nivel de reflexión, que se corresponden con las de PISA, en todas se solicita una medida por respuesta y en dos de ellas es preciso conocer un algoritmo directo de resolución. Sin embargo, las actividades de aula exigen un nivel de conexión, que supone cierto grado de comprensión de los datos, ya que los lugares geométricos no se citan en el enunciado, se debe comenzar por seleccionar cuál de los posibles es necesario utilizar, conocer su procedimiento de obtención y combinarlo con otro para determinar lo solicitado.

Diferencias y semejanzas en el manejo de los conceptos geométricos. De los datos presentes en la tabla 3, que señala ausencia o presencia del manejo de los conceptos geométricos en la resolución, todas las actividades analizadas, tanto las de aula como las de PISA, requieren conocer conceptos y propiedades, y hacer uso de las relaciones geométricas; en menor medida es necesario la ubicación, el uso de los movimientos y la orientación para obtener la solución.

Manejo de conceptos geométricos	C	E	D	G 1	G 2	PG 1	PG 2	A 1	A 2	A 3	A 4	A 5	A 6	A 7	A 8	A 9
Conceptos de las figuras	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x
Propiedades de las formas	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x
Relaciones geométricas	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x
Ubicación y movimientos			x	x		x	x	x	x	x	x		x	x	x	x
Orientación		x	x	x	x		x		x		x			x	x	x

Tabla 3. Manejo de conceptos geométricos en actividades de PISA y de Aula

Conclusiones

De acuerdo con los resultados se pueden establecer algunas dimensiones en las que se asemejan y se diferencian las actividades propuestas en PISA y en el aula. En relación con las semejanzas, todas las actividades menos una son problemas, de acuerdo con la clasificación de Castro y Ruiz (2015). Ambas evalúan a través de las actividades propuestas el manejo de los conceptos geométricos, en sus distintos apartados: las propiedades, las relaciones geométricas, la ubicación y los movimientos, y la orientación (Flores et al., 2015) y de este modo se cumple con algunos de los aspectos planteados en el NCTM (2000) acerca de la evaluación en geometría que pretende que el estudiante pueda analizar propiedades y explorar relaciones entre objetos, entre otros.

Las diferencias encontradas en las actividades propuestas por PISA y por los docentes en el aula parecieran ser mayores que las semejanzas. A partir de los resultados se puede concluir que una de las diferencias se encuentra en los niveles de complejidad, las actividades de aula requieren un desempeño de conexión, mientras que las actividades de PISA abarcan los tres niveles: reproducción, conexión y reflexión (Caraballo et al., 2011). Otra diferencia entre las actividades viene dada por el contexto, en su mayoría las de PISA presentan un contexto laboral, mientras que todas las de aula un contexto científico.

Otra diferencia son los datos del enunciado (Arévalo, 2009), las actividades de PISA priorizan la representación esquemática de la información o a través de textos largos, en ambos casos con aparición de datos considerados irrelevantes. Las actividades de aula, por el contrario, son textos breves con esquemas, que solo presentan información necesaria.

De manera general, las evaluaciones escritas de los docentes uruguayos no son sustancialmente diferentes de las actividades propuestas en las mediciones de PISA, si bien se diferencian en su formulación, en la presentación del enunciado y el contexto, y en los niveles de complejidad. Pareciera ser esta una de las causas de que el estudiante promedio uruguayo alcance el nivel uno de desempeño, por debajo del nivel básico de competencia definido por PISA.

Referencias bibliográficas

ANEP. (2004). *La evaluación de la "cultura matemática" en PISA 2003. Marco conceptual y actividades de las pruebas*. Gerencia de Investigación y Evaluación.

ANEP. (2013). *Uruguay en PISA 2012*. Gerencia de Investigación y Evaluación.

ANEP. (2017). *Marco Curricular de Referencia Nacional (MCRN). Una construcción colectiva*. ANEP.

Alsina, C., Burgués, C y Fortuny, J.M. (1997*). Invitación a la didáctica de la geometría* (4ª Ed.). Síntesis.

Arévalo, M. (2009). Comprensión de enunciados de problemas matemáticos. *Respuestas, 14* (2), 5-10.

Caraballo, R.M., Rico, L. y Lupiáñez, J.L. (2011). Pruebas autonómicas de diagnóstico para evaluar la competencia matemática en educación secundaria. En M. Marín, G. Fernández García, L.J. Blanco y M. Palarea (Coords.), *Investigación en educación matemática XV*, (pp. 307-318). SEIEM.

Castro, E. y Ruíz, J.F. (2015). Matemáticas y resolución de problemas. En P. Flores y L. Rico (Coords.), *Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en educación primaria* (pp. 89-106). Pirámide.

CES. (2010). *Programa de matemática primer año. Bachillerato, reformulación 2006, ajuste 2010*. ANEP.

CES. (2020). *Orientaciones vinculadas con la evaluación de los aprendizajes: la calificación*. ANEP.

Diezmann, C. y Lowrie, T. (2009). Primary students' spatial visualization and spatial orientation: an evidence base for instruction. En M. Tzekaki, M. Kaldrimidou y H. Sakonidis, (Eds.). *Proceedings of the 33rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, *2*, (pp. 417-424). PME.

Fernández, T. (2013). La investigación en visualización y razonamiento espacial. Pasado, presente y futuro. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa y N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 19-42). SEIEM.

Flores, P., Ramírez, R. y del Río, A. (2015). Sentido Espacial. En P. Flores y L. Rico (Coords.), *Enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas en Educación Primaria* (pp. 127-146). Pirámide.

Gutiérrez, A. (1996). Visualization in 3-dimensional geometry: In search of a framework. En L. Puig y A. Gutierrez (Eds.), *Proceedings of the 20th PME Conference*, *1* (pp. 3-19). Universidad de Valencia.

Jones, K., y Tzekaki, M. (2016). Research on the teaching and learning of geometry. En Á. Gutiérrez, G. C. Leder y P. Boero (Eds.)*, The Second Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education* (pp.109–149). Sense Publishers.

Krippendorff, K. (1990). *Metodología de análisis de contenido. Teoría y práctica.* Paidós.

NCTM (1989). *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics*. NCTM

NCTM (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. NCTM.

New Jersey Mathematics Coalition (1996). Geometry and spatial sense, Standard 7. En *New Jersey Mathematics Curriculum Framework*, (pp. 209-249).

Presmeg, N. C. (2006). Research on visualization in learning and teaching mathematics. En Á. Gutiérrez y P. Boero (Eds.), *Handbook of research on the psychology of mathematics education. Past, present and future*, (pp.205-236). Sense Publishers.

Rico, L. (2013). El método del análisis didáctico. *Unión. Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 33*, 11-27.

Santos, L. y Cai, J. (2016). Curriculum and assessment. En Á. Gutiérrez, G. C. Leder y P. Boero (Eds.), *The Second Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education*, (pp.153–185). Sense Publishers.

Stylianou, D. (2001). On the reluctance to visualize in mathematics: Is the picture changing? En M. van den Heuvel-Panhuizen (Ed.), *Proceedings of the 25th PME International Conference, 4,* (pp.225-232). Utrecht University.

Suurtamm, C., Thompson, D. R., Kim, R. Y., Moreno, L. D., Sayac, N., Schukajlow, S., Silver, E., Ufer, S. y Vos, P. (2016). *Assessment in mathematics education: Large-scale assessment and classroom assessment*. (pp. 27-33). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-32394-7

Resolución de problemas de probabilidad condicional: un estudio en docentes de educación media chilenos

Álvaro Toledo San Martín

alvaro.toledo@ubo.cl., Universidad Bernardo O'Higgins, Chile

Tema: Pensamiento probabilístico – estadístico

Modalidad: comunicación breve

Nivel educativo: secundario

Resumen: *En este estudio se presentan los resultados de una investigación sobre la resolución de problemas de probabilidad condicional realizada por 40 profesores de matemáticas de educación media (secundaria) de distintos establecimientos educativos chilenos. Las preguntas planteadas abordan problemas relacionados con el condicionamiento y la temporalidad (falacia temporal), el problema del condicionamiento y la causalidad (falacia de la causalidad) y situaciones diacrónicas. Los resultados principales revelan que los docentes enfrentan dificultades en la resolución de problemas con situaciones diacrónicas, ya que solo obtuvieron un 25% de respuestas correctas. Esto contrasta con el 70% de respuestas correctas en el problema con falacia de la causalidad y el 85% de respuestas correctas en el problema con falacia temporal. Estas diferencias en los porcentajes podrían indicar una brecha en la comprensión de los docentes en términos de la aplicabilidad de los conceptos en diferentes contextos y escenarios dentro de los problemas de probabilidad condicional. Los resultados de este estudio evidencian las dificultades que los profesores de matemáticas de educación media enfrentan al resolver problemas de probabilidad condicional. Estos hallazgos pueden contribuir al desarrollo de intervenciones pedagógicas más efectivas que mejoren la calidad de la educación en matemáticas en el nivel de educación media.*

Palabras claves: *resolución de problemas de probabilidad condicional, condicionamiento y temporalidad, condicionamiento y causalidad, probabilidad con situaciones diacrónicas.*

Introducción

El estudio de la probabilidad condicional ha sido un tema de interés para investigadores durante las últimas décadas. De acuerdo con De la Fuente y Díaz (2004) "La probabilidad condicional es fundamental en las aplicaciones de la Estadística porque permite incorporar cambios en nuestro grado de creencia sobre los sucesos aleatorios a medida que adquirimos nueva información". (p.245). Existe una amplia literatura respecto a la comprensión de la probabilidad condicional. En Díaz y Batanero (2005), por ejemplo, se aborda el concepto de probabilidad condicional desde la mirada de los textos universitario, en Fernández (2004), Roh (2008) y Zazkis y Leikin (2008) se evalúa la comprensión del concepto de probabilidad y probabilidad condicional en docentes y estudiantes de distintos niveles. Por otra parte, Huerta y Arnau (2017) estudian las relaciones entre las probabilidades condicionales y conjuntas en el proceso de resolución de problemas escolares desde una perspectiva educativa.

Si bien, el conocimiento de la probabilidad condicional es requisito para la comprensión y resolución de problemas de Inferencia Bayesiana, Test de Hipótesis (cálculo de valor-p y errores tipo I y II, además de la confianza y la potencia de la prueba), Modelos Lineales e inclusive en algoritmos de clasificación en Aprendizaje Automático existen dificultades asociadas a la resolución de estos problemas. Autores como Contreras (2011) señalan que la probabilidad condicional es posiblemente uno de los temas estadísticos más relevantes, pero a la vez, es el más complejo de comprender para estudiantes, docentes e investigadores. Entre las dificultades más habituales en la resolución de problemas de probabilidad condicional se encuentran aspectos como: la comprensión de los conceptos de probabilidad marginal, conjunta y condicional (Borovcnik, 2012, Contreras et al., 2013, Toledo, 2016, Sneyd et al., 2022), la identificación de eventos independientes (D'Amelio, 2004, Kataoka et al., 2010), la notación y simbología empleada para denotar las probabilidades (Feller, 1973, Sánchez, 2000) y dificultades relacionadas con falacias, tales como, la falacia temporal presentada por Gras y Totohasina (1995), la falacia de la causalidad estudiada en Kahneman et al. (1982) y las confusiones entre situaciones diacrónicas y sincrónicas revisadas en De la Fuente y Díaz (2004). Siguiendo esta línea, en este estudio se presentan los resultados obtenidos por docentes de enseñanza media (secundaria) respecto a preguntas relacionadas con probabilidad condicional, en específico, se pretende mostrar si existen dificultades al responder preguntas de probabilidad condicional que abordan los problemas asociados a la falacia temporal, la falacia de la causalidad y los enunciados de tipo sincrónicos y diacrónicos.

Marco teórico

El estudio se centra en la resolución de tres problemas de probabilidad condicional: un problema sobre condicionamiento y temporalidad, un problema sobre condicionamiento y causalidad y un problema sobre una situación diacrónicas. A continuación, se describen cada una de las problemáticas:

Condicionamiento y temporalidad (falacia temporal): Gras y Totohasina (1995) denominan a este fenómeno la concepción cronológica en donde se considera la probabilidad condicional P(A/B) como una relación temporal, en donde el evento condicionante B siempre precede al evento A, es decir, el suceso condicionante en la probabilidad condicional ha de preceder temporalmente al condicionado. Esto es una falacia debido a que la probabilidad condicional no exige temporalidad entre el evento condicionante y condicionado, es más, teniendo la información adecuada estos problemas pueden resolverse utilizando el Teorema de Bayes.

Ejemplo. Problema 6, parte 2 adaptado del artículo de Falk (1986):

> Una urna contiene dos bolas blancas y dos bolas negras. Extraemos a ciegas dos bolas de la urna, una detrás de otra, sin reemplazamiento ¿Cuál es la probabilidad de extraer una bola negra en primer lugar, sabiendo que hemos extraído una bola negra en segundo lugar? (p. 292)

Si se analiza la pregunta, el evento condicionante ocurre posterior (en el eje temporal) al evento condicionado. Desde un punto de vista cronológico no tendría sentido la pregunta debido a que, nos condicionan el evento inicial "extraer en primer lugar una bola negra" a uno posterior "sabiendo que hemos extraído una bola negra en segundo lugar". Aunque parezca contraintuitivo, en inferencia bayesiana el evento "obtener una bola negra en segundo lugar" influye sobre las extracciones de la urna, ya que, nos dice que de las cuatro esferas del problema (2 negras y 2 blancas) la segunda esfera debe ser negra, es decir, esta esfera se "reserva" a la segunda extracción (recordar que las extracciones son sin reposición) entregándonos la información de que en la primera extracción podemos obtener dos casos de tres en donde se extrae una bola blanca y un caso de tres donde se obtiene una bola negra, siendo esta última la respuesta a la pregunta.

Condicionamiento y causalidad (falacia de la causalidad): "La causalidad es un concepto científico, filosófico y psicológico complejo. Por otro lado, es también un concepto intuitivamente comprendido y aceptado por las personas" (De la Fuente y Díaz, 2004, p.4). Las relaciones causa-efecto son parte de la experiencia y nos permiten entender nuestro entorno y construir nuestro conocimiento del mundo. Pese a esto, en problemas de probabilidad existen confusiones respecto a las relaciones de tipo causales y las dependientes. Adicional a esto, autores como Kahneman et al. (1982) identificaron en sus estudios que para la mayoría de las personas las relaciones de tipo causales son más probables que las relaciones diagnósticas.

Ejemplo. Problema 5, adaptado del artículo de Pollatsek et al. (1987):

> ¿Cuál de los siguientes sucesos es más probable?
>
> a) Que una niña tenga los ojos azules si su madre tiene los ojos azules.
>
> b) Que una madre tenga los ojos azules si su hija tiene los ojos azules.
>
> c) Los dos sucesos son igual de probables. (p. 256)

Tversky y Kahneman (1982) muestran que, si bien la mayoría de las personas responden correctamente a la pregunta (la alternativa c) hay una cantidad importante de individuos que seleccionan la alternativa a), es decir, asignan una mayor probabilidad a un evento causal (la hija tiene los ojos azules causa de que la madre tiene los ojos azules) que a un evento diagnóstico (la madre debe tener los ojos azules porque al ver a su hija, ésta tiene los ojos azules).

Por otra parte, autores como Douven (2016) y Skovgaard-Olsen et al. (2016) analizan este tema desde un punto de vista epistemológico mencionando la medida denominada asertividad (Shep, 1958) como una medida de referencia sobre la inclinación hacia un tipo de respuesta en problemas de probabilidad condicional. Los autores observaron una correlación importante especialmente en condicionales de tipo diagnósticas. Para profundizar sobre este tema se sugiere fuertemente el artículo de Van Rooij y Schulz (2019) quienes tratan detalladamente este tema.

Situaciones diacrónicas y sincrónicas: la dificultad del desarrollo de las tareas de probabilidad condicional puede deberse a si se percibe o no el experimento compuesto como una serie de experimentos simples sucesivos (De la Fuente y Díaz, 2004). En las situaciones diacrónicas (dinámicas) hay una secuencia temporal en donde se realiza un experimento detrás de otro, en cambio, en situaciones sincrónicas (estáticas) la realización de los experimentos es simultánea. En este estudio se abordaron las situaciones diacrónicas con el fin de observar el planteamiento de probabilidad condicional que se deriva del problema.

Ejemplo: Problema 10. Adaptado de Ojeda (1995):

> En una urna hay dos bolas blancas y dos bolas negras. Tomamos una bola blanca de la urna y sin reemplazarla tomamos una segunda bola al azar de la urna. ¿Cuál es la probabilidad de que la segunda bola sea blanca? (p. 41)

A continuación, se detalla el método del estudio, las tareas y procedimientos y los resultados relevantes.

Método

Muestra

La muestra corresponde a 40 profesores de educación media (secundaria) chilenos de distintos establecimientos educacionales del país.

Tareas y procedimientos

A cada docente se le proporcionó un cuestionario de 13 preguntas relacionadas con problemas de probabilidad. Para este estudio se reportarán los resultados del problema 5 (que aborda el problema de la falacia de la causalidad), el problema 6 (que aborda el problema de la falacia temporal) y el problema 11 (que aborda el problema de las situaciones diacrónicas) los cuales tributan a las problemáticas descritas en el marco teórico. A continuación, se presentan los enunciados de las preguntas del estudio y sus respectivas respuestas.

Problema 5 *¿Cuál de los siguientes sucesos es más probable?*

a) *Que una niña tenga los ojos azules si su madre tiene los ojos azules.*

b) *Que una madre tenga los ojos azules si su hija tiene los ojos azules.*

c) *Los dos sucesos son igual de probables. (respuesta correcta)*

Problema 6. *La probabilidad de que llueva hoy es de 0,4 y la probabilidad de que llueva mañana dado llovió hoy es de 0,6, por otra parte, la probabilidad de que llueva mañana dado que hoy no llovió es de 0,3 ¿Cuál es la probabilidad de que llueva hoy si se sabe que lloverá mañana?*

Solución:

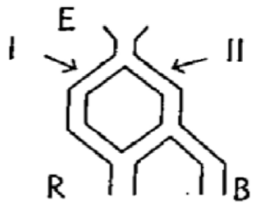
Sean los eventos:

H: llueve hoy

M: lloverá mañana

$$P(H|M) = \frac{P(M|H)P(H)}{P(M)} = \frac{P(M|H)P(H)}{P(M|H)P(H) + P(M|H^C)P(H^C)} = \frac{0,6 \cdot 0,4}{0,6 \cdot 0,4 + 0,3 \cdot 0,6} = 0,57$$

Problema 11. *Una esfera se suelta por la entrada E. Si sale por R, ¿Cuál es la probabilidad de que haya pasado por el canal I?*



Solución:

Sean los eventos:
I: la esfera pasa por el canal I
II: la esfera pasa por el canal II
R: la esfera sale por R

$$P(I|\mathrm{R}) = \frac{P(I \cap R)}{P(R)} = \frac{P(R|I)P(I)}{P(R|I)P(I) + P(R|II)P(II)} = \frac{1 \cdot 0,5}{1 \cdot 0,5 + 0,5 \cdot 0,5} = \frac{2}{3} = 0,67$$

Resultados

En la Tabla 1 se resumen los resultados de respuestas correctas, incorrectas u omisiones obtenidos para los problemas seleccionados. Como observaciones se tiene que tanto para los casos de las preguntas que abordan la falacia de la causalidad y la falacia temporal se obtuvieron porcentajes destacables de respuestas correctas (70% y 85% respectivamente). Para la pregunta que aborda la falacia temporal (problema 6), si bien, existen pocos casos con respuestas incorrectas, en casi todos estos, quienes respondieron indicaron que no tenía lógica (Figura 1) debido a que se preguntaba un evento pasado condicionado a uno futuro. En el problema 5 (falacia de la causalidad) no se observan detalles debido a que el tipo de respuesta era con alternativa y ninguno de quienes respondieron esta pregunta indicó el detalle sobre el razonamiento para llegar a la respuesta seleccionada.

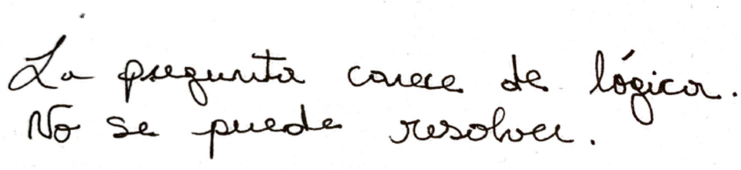


Figura 1. Ejemplo de solución incorrecta al problema 6, docente 2

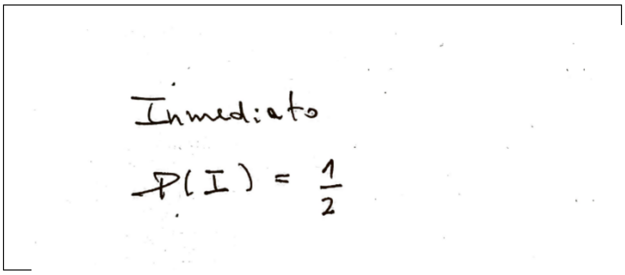


Figura 2. Ejemplo de solución incorrecta al problema 11, docente 17

Para la pregunta 11, que aborda las situaciones diacrónicas, se obtuvo un 62,5% de respuestas incorrectas. En la mayoría de los casos, específicamente en el 80% de las respuestas incorrectas (20 respondientes), al abordar la probabilidad pedida "¿cuál es la probabilidad de que la esfera haya pasado por el canal I?" no consideraron la información que la esfera sale por el canal R (información condicionante) abordando un problema de probabilidad condicional $\mathbf{PI|R}$ como un problema de probabilidad marginal $\mathbf{PI}$ obteniendo en todos los casos el resultado $\mathbf{PI=0{,}5}$. (Figura 2).

Problema	Tipo de problema	Respondieron correctamente	No respondieron correctamente	Omitieron responder	Porcentaje de respuestas correctas
5	Falacia de la causalidad	**28**	10	2	70%
6	Falacia de la temporalidad	**34**	4	2	85%
11	Situación diacrónica	10	**25**	5	25%

Tabla 1. Resumen de frecuencias y porcentajes de respuestas correctas, incorrectas y omitidas por tipo de problema.

Como observación, el problema 11 es similar al conocido problema de Monty Hall (problema de las tres puertas, en donde, detrás de una de éstas hay un premio y detrás de las otras dos no hay nada). En este problema, si se ignora la información de que el presentador del *show* (Monty Hall) abre una de las tres puertas (puerta sin premio) posterior a que el concursante ha seleccionado una de las puertas, cuando se da la opción al participante de cambiar la elección de la puerta y se pregunta ¿cuál es la probabilidad de obtener el premio mayor si se cambia la elección de la puerta? El razonamiento incorrecto es pensar que como se abrió una de las puertas, la probabilidad de acertar ahora es de 1/2 (solo quedan dos puertas cerradas y una de ellas tiene el premio) siendo iguales las probabilidades de que el premio esté detrás de la puerta elegida originalmente o detrás de la puerta restante. El razonamiento correcto, en cambio, es observar que el presentador siempre abre una puerta sin premio, por lo que, la probabilidad de que el premio esté en la puerta no seleccionada desde el inicio (puerta no elegida por el participante y no abierta por Monty Hall) ahora es de 2/3 en comparación con la puerta seleccionada originalmente cuya probabilidad de obtener el premio es de 1/3 (probabilidad original con las 3 puertas cerradas). La solución poco intuitiva de este problema (al igual que el problema 11) fue explicada por la matemático, literata, escritora y columnista Marilyn Vos Savant en 1990 (Rosenthal, 2008).

Conclusiones

A grandes rasgos se observa que los docentes presentan dificultades en la resolución de problemas con situaciones diacrónicas obteniendo solo un 25% de respuestas correctas. La dificultad en la resolución en estos tipos de problemas se puede deber a representaciones sincrónicas (estáticas) de situaciones diacrónicas (dinámicas). Esto significa que los docentes pueden tener dificultades para visualizar cómo evolucionan las situaciones a lo largo del tiempo, lo que limita su capacidad para comprender y resolver problemas que involucran cambios temporales. Como observación, la mayoría de los docentes no consideró la información de que se sabe que la esfera sale por el canal R (por lo que se ignora que el tipo de probabilidad a resolver es condicional). Esto sugiere una falta de comprensión de conceptos fundamentales relacionados con la probabilidad condicional, lo cual debe ser considerado ya que la probabilidad condicional es un concepto fundamental en la resolución de problemas y en la toma de decisiones.

Por otra parte, para el problema que aborda la falacia de la causalidad el porcentaje de respuesta correctas es de un 70% y para el problema que involucra la falacia temporal el 85% de los docentes respondió correctamente. El porcentaje de respuestas correctas para el caso con falacia temporal podría deberse al planteamiento numérico del problema (no conceptual) lo que lleva al uso directo del Teorema de Bayes evitando el cuestionamiento de la temporalidad de los eventos presentados (un evento pasado está condicionado por uno futuro). Es alentador que los docentes hayan obtenido un porcentaje de respuestas correctas más alto en problemas que involucran la falacia de la causalidad y la falacia temporal. Sin embargo, es importante tener en cuenta que el porcentaje de respuestas correctas no es del 100%, lo que indica que aún existe margen de mejora en la comprensión de estos conceptos asociados a falacias en probabilidad condicional.

Cabe señalar que las dificultades en la resolución de problemas por parte de los docentes podrían tener un impacto negativo en la calidad de la enseñanza de los conceptos relacionados. Los estudiantes podrían recibir una instrucción deficiente en temas que involucran cambios a lo largo del tiempo y probabilidades condicionales, lo que podría limitar su comprensión y capacidad para aplicar estos conceptos en situaciones prácticas. Como sugerencia, sería importante brindar a los docentes oportunidades de desarrollo profesional y capacitación en el área de resolución de problemas de probabilidad, abordando las dificultades asociadas a falacias en problemas de probabilidad condicional. Esto podría incluir talleres, cursos o materiales educativos que les permitan mejorar su comprensión de estos conceptos y desarrollar estrategias efectivas para enseñarlos a sus estudiantes. Además, se podría fomentar el uso de enfoques pedagógicos que ayuden a los docentes a visualizar y comprender mejor las situaciones dinámicas, como el uso de representaciones gráficas, simulaciones o ejemplos prácticos

Como línea de acción a futuro se considera la ampliación del estudio de la resolución de problemas de probabilidad condicional en situaciones diacrónicas y sincrónicas, en específico, estudiar el enfoque de aprendizaje de estas situaciones mediante el uso de paradojas, tales como, la paradoja de Monty Hall, la paradoja de Bertrand y la paradoja de la división de la apuesta, entre otras.

Referencias bibliográficas

Borovcnik, M. (2012). Multiple perspectives on the concept of conditional probability.'Perspectivas múltiples sobre el concepto de la probabilidad condicional'. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, 2(1), 5-27. https://doi.org/10.35763/aiem.v1i2.32

Contreras, J. M. (2011). *Evaluación de conocimientos y recursos didácticos en la formación de profesores sobre probabilidad condicional* [Tesis Doctoral, Universidad de Granada]. http://www.ugr.es/~batanero/documentos/contreras.pdf

D'Amelio, A. (2004). Eventos mutuamente excluyentes y eventos independientes: concepciones y dificultades. En L. Díaz (Ed.), En *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 17* (p. 138-144). Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

De la Fuente, E. y Díaz, C. (2004). Razonamiento sobre probabilidad condicional e implicaciones para la enseñanza de la estadística. *Epsilon: Revista de la Sociedad Andaluza de Educación Matemática "Thales"*, (59), 245-260.

Díaz, C. y Batanero, C. (2005). La probabilidad condicional en los textos de estadística parapsicología. En *Acta del V Congreso Iberoamericano de Educación Matemática*. Fisem.

Douven, I. (2016). *The epistemology of indicative conditionals. Formal and empirical approaches*. Cambridge University Press. https://doi.org/10.1017/CBO9781316275962

Falk, R. (1986). Conditional Probabilities: insights and difficulties. En R. Davidson y J. Swift (Eds.), *Proceedings of the Second International Conference on Teaching Statistics*. (p. 292 - 297). International Statistical Institute.

Feller, W. (1973). *Introducción a la teoría de las probabilidades y sus aplicaciones*. Limusa.

Fernández, E. (2004). The students' take on the epsilon-delta definition of a limit. Problems, Resources, and Issues in Mathematics Undergraduate Studies. *Primus*, 14(1), 43-54. https://doi.org/10.1080/10511970408984076

Gras, R., y Totohasina, A. (1995). Chronologie et causalité, conceptions sources d'obstacles épistémologiques à la notion de probabilité. *Recherches en Didactique des Mathématiques, Grenoble*, 15(1), 49 - 95.

Huerta, M.P. y Arnau, J. (2017). La probabilidad condicional y la probabilidad conjunta en la resolución de problemas de probabilidad. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, 11, 87 - 106. https://doi.org/10.35763/aiem.v1i11.188

Kahneman, D., Slovic, P. y Tversky, A. (1982). *Judgment Under Uncertainty: Heuristics and-Biases*. Cambridge University Press. https://doi.org/10.1017/CBO9780511809477

Kataoka, V., Hernández, H. y Borim, C. (2010). Independence of events: analysis of knowledge level in different groups of students. En C. Reading (Ed.). *Proceedings of the Eight International. Teaching Statistics*. International Statistical Institute.

Ojeda, A. M. (1995). Dificultades del alumnado respecto a la probabilidad condicional. *UNO*, 5, 37-55.

Pollatsek, A., Well, A. D., Konold, C. y Hardiman, P. (1987). Understanding Conditional Probabilities. *Organization, Behavior and Human Decision Processes,* 40, 255 - 269. https://doi.org/10.1016/0749-5978(87)90015-X

Roh, K. H. (2008). Students' images and their understanding of definitions of the limit of a sequence. *Educational Studies in Mathematics*. 69(3), 217-233. https://doi.org/10.1007/s10649-008-9128-2

Rosenthal, J. S. (2008). Monty hall, monty fall, monty crawl. *Math Horizons*, 16(1), 5-7. https://doi.org/10.1080/10724117.2008.11974778

Sánchez, E. (2000). Investigaciones didácticas sobre el concepto de eventos independientes en probabilidad. *Recherches en Didactique Mathématiques*, 20(3), 305-330.

Shep, M. (1958). Shall we count the living or the dead? *New England Journal of Medicine*, 259, 1210-1214. https://doi.org/10.1056/NEJM195812182592505

Skovgaard-Olsen, N., Singmann, H., y Klauer, K. (2016). The relevance effect and conditionals. *Cognition*, 150, 26-36. https://doi.org/10.1016/j.cognition.2015.12.017

Sneyd, J., Fewster, R. M., y McGillivray, D. (2022). Conditional probability. En *Mathematics and Statistics for Science* (pp. 583-604). Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-031-05318-4_30

Toledo, Á. (2016). Definición de probabilidad simple y probabilidad condicional: un estudio en alumnos de Ingeniería. *Premisa*, 69, 41-49.

Tversky, A. y Kahneman, D. (1982). Causal schemas in judgment under uncertainty. En D. Kahneman, P. Slovic y A. Tversky (Eds.), *Judgement under uncertainty: Heuristics and biases* (p. 117-128). Cambridge University Press. https://doi.org/10.1017/CBO9780511809477.009

Van Rooij, R., y Schulz, K. (2019). Conditionals, causality and conditional probability. *Journal of Logic, Language and Information,* 28, 55-71. https://doi.org/10.1007/s10849-018-9275-5

Zazkis, R. y Leikin, R. (2008). Exemplifying definitions: a case of a square. *Educational Studies in Mathematics*, 69(2), 131-148. https://doi.org/10.1007/s10649-008-9131-7

Mary Somerville

Karina Alexandra Pintos Gonnet

matematica.uy@gmail. Uruguay.

Tema: Educación Matemática y Género.

Modalidad: Comunicación breve.

Nivel educativo: Educación secundaria.

Resumen: *En este trabajo nos introduciremos en el estudio sobre género en matemática educativa. Con el propósito de cubrir las ausencias que se pueden presentar en los programas escolares y libros de textos actuales de mujeres matemáticas, presentaremos la vida y obra de Mary Somerville. Además, expondremos tres actividades para el aula, extraídas de la revista "The Ladies' Diary" con la que Somerville aprendía y se entretenía en su juventud.*

Palabras claves: *Género, Mujeres Matemáticas, Revista histórica, Actividades para el aula.*

Educación Matemática y Género

Introducción

Según Forgasz (2020) las investigaciones sobre género en educación matemática comenzaron en 1970 bajo el movimiento del feminismo liberal que diferenció dos términos claves: *sexo biológico* y *género*. El primero corresponde a las características biológicas y genéticas que se expresan a través de los órganos genitales y funciones, que diferencian a los seres humanos entre mujeres y hombres, y el segundo término hace referencia a una construcción social y cultural en el que se le asignan ciertas características tales como sentimientos, valores, roles y responsabilidades a una persona según su sexo biológico. En consecuencia, el género establece los rasgos característicos que "deben" tener una mujer u hombre, dividiendo a los seres humanos únicamente en dos categorías femenina o masculino, rechazando o castigando a todo aquel que no se ajuste a estos *estereotipos* o *roles de género*. Los *sesgos de género* se producen cuando se favorece a un género sobre otro resultando este último perjudicado. Cuando estos sesgos se producen hacia las mujeres aumentando la desigualdad le llamamos *brecha de género.*

Los primeros estudios que se realizaron en matemática educativa desde esta perspectiva se enfocaron en: los resultados descendidos y la disminuida participación de las mujeres en matemática, en comparación a la de los hombres, y la valoración del aspecto afectivo/actitudinal frente a obtener logros en matemática (Forgasz, 2020).

Entre 1980 y 1990, se publicaron numerosos libros y artículos en el campo, en especial gracias a la considerada “madre fundadora” Elizabeth Fennema, introduciendo nuevas áreas de estudio, por ejemplo, el lugar de las mujeres en la historia matemática, en la educación matemática y su relación con el curriculum.

Otras investigaciones más actuales continúan estudiando las diferencias entre los desempeños matemáticos entre mujeres y hombres reconociendo la gran variedad de factores socioculturales tales como los estereotipos de género, las creencias, actitudes y la autoconfianza para trabajar en matemática (Simón et al., 2022).

La Organización de las Naciones Unidas para la Educación, la Ciencia y la Cultura ha concluido que las mujeres tienen, sin importar su nación de origen, una participación minoritaria en las siguientes disciplinas ciencias, tecnología, ingeniería y matemática (STEM del inglés Science, Technology, Engineering, Mathematics), expresando que esta situación implica un freno en el desarrollo sostenible ya que la participación de las mujeres enriquecerá la visión en estas áreas (Unesco, 2019).

En Uruguay algunas exploraciones en educación matemática desde la perspectiva de género empiezan a surgir. Por ejemplo, se han realizado diseños de secuencias de enseñanza, bajo la línea de investigación de la enseñanza de la matemática para la justicia social, que abordan el tema de brecha de género (Dolgay y Ochoviet, 2016; Galli et al., 2017, referidos en Molfino y Ochoviet, 2021). Por otra parte, Molfino y Ochoviet (2021) analizaron una serie de ejercicios de matemática elaborado para la formación de profesores, desde la misma perspectiva, enfocándose en los mensajes que estos transmiten a través de los roles de género que de ellos se desprenden.

Práctica Docente

Generalmente una herramienta fundamental utilizada por los docentes para planificar sus clases son los libros de textos, estos contienen ejercicios, problemas contextualizados, imágenes, personajes, cierta manera de utilizar el lenguaje, etc., que nos transmiten información explícita e implícita acerca de nuestro entorno, cultura y de cómo concebimos al mundo, a las relaciones dentro de este, y en particular, con la matemática.

De esta manera "ingresan en el aula variados enunciados que son portadores de información que puede contener sesgos u opiniones acerca de distintos asuntos" (Molfino y Ochoviet, 2021, p.314).

La epistemología feminista ha concluido que se han excluido a las mujeres de los espacios de construcción del conocimiento, rechazando sus aportes e invisibilizándola, el aula y el sistema educativo es reproductor de esta situación ya que transmiten la cultura hegemónica a través de las prácticas sociales. Según Simón et al. (2002) los libros de textos han sido evidencia de ello, ya que se ha documentado la falta de presencia de mujeres o su participación, en la mayoría de los casos, dentro del ámbito privado, ocupando roles de cuidado, limpieza o tareas del hogar, cualidades atribuidas a lo femenino y apartándola de oficios, profesiones o de la producción del conocimiento asociadas a lo masculino.

Con el propósito de cubrir estas ausencias de mujeres matemáticas que se pueden presentar en los programas escolares y libros de textos actuales de educación matemática, podemos encontrar diversos materiales que se han desarrollado con biografías y actividades que se desprenden de los trabajos de estas. La incorporación de estos recursos en las aulas beneficia a los estudiantes al observar nuevos modelos femeninos con los cuáles identificarse y también, enriqueciéndola con contenidos matemáticos.

Es con este fin que a continuación presentaremos la biografía de una extraordinaria científica llamada Mary Somerville y algunas actividades relacionadas a ella.

Mary Somerville

Figura 1: Mary Somerville

Biografía

Mary Fairfax Somerville, vivió en una época en que las ciencias no estaban separadas como en la actualidad, luego de su muerte el London Post la llamó "la reina de las ciencias del siglo XIX". A continuación, presentaremos una breve reseña biográfica con información extraída del libro "Género y matemáticas" (Figueiras et al., 1999).

Nació en Escocia en 1780, pasó su infancia en contacto con la naturaleza. A los diez años la enviaron a un internado porque apenas sabía leer y escribir. En esta escuela como método pedagógico la obligaron a aprender de memoria las palabras y definiciones de un diccionario. A pesar de esa experiencia traumática, Mary desarrolló su curiosidad y el gusto por la lectura. En un curso de pintura aprendió nociones de perspectiva y geometría (Elementos de Euclides). Se divertía resolviendo problemas que aparecían en la revista "The Ladies' Diary".

Durante su adolescencia, Mary podía escuchar al tutor de su hermano cuando impartía clases y este se asombró de las respuestas que ella brindaba, por lo que le proporcionó libros científicos para continuar sus estudios. Sus padres le prohibieron aprender matemática ya que consideraban que iba a terminar en "una camisa de fuerza" e incluso "estéril".

Se casó con Samuel Greig y tuvieron dos hijos, pero enviudó a los tres años de matrimonio. Más tarde, se casó con su primo Dr. William Somerville, quién la ayudó a estudiar copiando a mano los libros de la biblioteca a la que Mary tenía prohibido ingresar.

En 1827, lord Henry Brougham le solicitó a Mary que escribiera una traducción del libro la Mecánica Celeste de Laplace para incorporarlo a su biblioteca. Ella no sólo lo tradujo, sino que añadió comentarios, dibujos y diagramas que permitieron una mayor comprensión del texto. Fue muy elogiado y un éxito en ventas. En 1834, escribió La conexión de las fuerzas físicas, donde explicaba científicamente el funcionamiento de las fuerzas que existen en el universo y utilizando razonamientos matemáticos dedujo la existencia de un planeta más. Con los datos aportados posteriormente John Adams localizó el planeta Neptuno. Otros de sus libros fueron Geografía Física, que explica fenómenos naturales y las relaciones entre los seres vivos, y Sobre la ciencia molecular microscópica.

Fue nombrada miembro de la Real Sociedad de Astronomía, y la reina Victoria le otorgó una pensión equivalente a 200 libras anuales para que continuara sus estudios. Fue mentora de Ada Byron, quien creó el primer código de programación del mundo.

Con 89 años comenzó a escribir su autobiografía Recuerdos personales. Poco antes de morir escribió:

> Tengo 92 años, … mi memoria para los acontecimientos ordinarios y especialmente para los nombres es débil, pero no para las matemáticas o las experiencias científicas. Soy todavía capaz de leer libros de álgebra superior durante cuatro o cinco horas por la mañana, e incluso de resolver problemas. (Figueiras et al., 1999, p. 158)

Fue una defensora de la educación literaria y científica para las mujeres y luchó para conseguir el derecho del voto femenino.

Tienen su nombre una isla, un colegio universitario de Oxford, un asteroide y un cráter de la Luna.

The Ladies' Diary

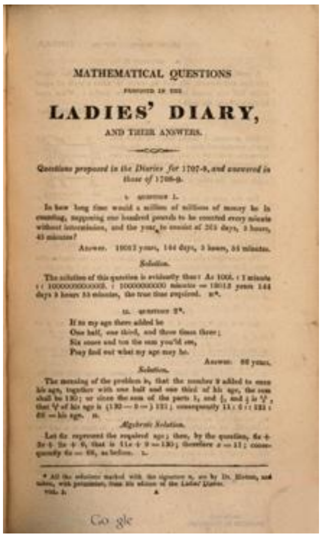
La revista y almanaque "The Ladies' Diary" fue muy popular entre los años 1704 y 1841, contenía calendarios astronómicos, poemas, adivinanzas y muchos problemas cuyas respuestas se otorgaban inmediatamente o en la siguiente edición.

Para Swetz (2018) esta colección es un tesoro para la historia de la matemática ya que documenta el desarrollo de esta disciplina a través de esos años y es una antecesora de las de revistas científicas y enciclopedias. Además, es la primera publicación de lengua inglesa que se dirigió exclusivamente hacia las mujeres y las desafiaban a resolver diferentes problemas brindándoles conocimientos de matemática, en una época en que esta era considerada una actividad "masculina".

Mary Somerville disfrutaba de su lectura y aunque no tenía nociones de álgebra se disponía a resolver los desafíos que en ella encontraba, ella decía:

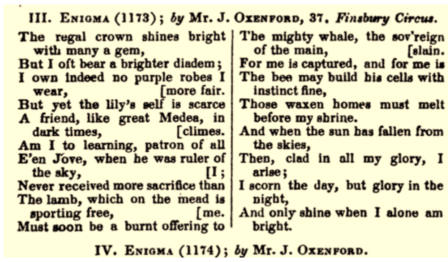
> …al volver una página quedé sorprendida al ver unas líneas extrañas mezcladas con letras, como *x* o *y*, y pregunté: ¿Qué es esto? Oh, dijo Miss Ogilvie, es una clase de aritmética, se llama álgebra, pero no puedo contarte más nada sobre ello. (Figueiras et al., 1999, p. 153)

A continuación, compartimos tres fotografías, en la primera observamos la portada de la revista de la edición de 1787, en la cual se encuentra de forma ilustrada el portarretrato de la reina Charlotte, esposa del Rey George III, en las siguientes dos imágenes se encuentran las tres actividades que proponemos para compartir en el aula. Seguidamente presentamos los problemas y la adivinanza traducidas al español.


MATHEMATICAL QUESTIONS

LADIES' DIARY,

AND THEIR ANSWERS.


III. ENIGMA (1173); *by* MR. J. OXENFORD, 37. *Finsbury Circus.*

The regal crown shines bright with many a gem,
But I oft bear a brighter diadem;
I own indeed no purple robes I wear,
But yet the lily's self is scarce more fair.
A friend, like great Medea, in dark times,
Am I to learning, patron of all climes.
E'en Jove, when he was ruler of the sky,
Never received more sacrifice than I;
The lamb, which on the mead is sporting free,
Must soon be a burnt offering to me.
The mighty whale, the sov'reign of the main,
For me is captured, and for me is slain.
The bee may build his cells with instinct fine,
Those waxen homes must melt before my shrine.
And when the sun has fallen from the skies,
Then, clad in all my glory, I arise;
I scorn the day, but glory in the night,
And only shine when I alone am bright.

IV. ENIGMA (1174); *by* MR. J. OXENFORD.

Figura 2: Portada de revista **Figura 3: Problemas** **Figura 4: Adivinanza**

<u>Problema 1</u>

¿Cuánto tiempo tardo en contar un millón de millones, suponiendo que en un minuto logro contar $100 sin interrupciones y que un año tiene 365 días, 5 horas y 45 minutos?

<u>Problema 2</u>

Si a mi edad le agregas su mitad, más el tercio y tres veces tres, obtendrás seis veintenas más diez. ¿Puedes averiguar qué edad tengo?

<u>Adivinanza</u>

La corona real brilla con sus gemas, pero yo suelo llevar una tiara más brillante.

Soy una amiga, como el gran Medea, en los tiempos oscuros.

Soy del aprendizaje, patrón de todos, incluso de Júpiter, cuando reinaba el cielo.

La poderosa ballena, la gran soberana, para mi es capturada.

Para mí también es la abeja, que puede construir sus celdas con su fino instinto, y esos hogares de cera deben derretirse ante mi altar.

Cuando el sol ha caído desde los cielos, luego, revestida en toda mi gloria, yo emerjo.

Rechazo el día, pero me regocijo en la noche, y solamente resplandezco cuando brillo en la soledad.

Secuencia de actividades

Estas actividades fueron acondicionadas y propuestas en diferentes grupos de tercer año de ciclo básico de educación media (actualmente equivalente al noveno grado de la educación básica integral) del liceo Nº2 “Prof. Héctor Almada” de la ciudad de San José de Mayo, Uruguay.

En primer lugar, se les preguntó a los estudiantes ¿qué científicos o científicas conocen?, generalmente las respuestas son mayoritariamente de nombres masculinos que femeninos, por lo que se les propone conocer la vida y obra de Mary Somerville a través de las siguientes preguntas:

1. ¿Cuándo y dónde nació?
2. ¿Cómo fue su infancia?
3. ¿Cuál era la posición de sus padres respecto a que Mary estudiara?
4. ¿Qué le gustaba estudiar e investigar?
5. ¿Cuánto años vivió?
6. ¿Qué logros tuvo? ¿Qué reconocimientos le han hecho?
7. Busca alguna frase famosa de Mary y escríbela.

Luego, se realizó una puesta en común en la que todos participaron realizando comentarios y cuando fue necesario la docente aportó más información. Por ejemplo, en la etapa de la adolescencia se comentó sobre la revista que Mary utilizaba en su adolescencia como forma de entretenimiento. De esta presentación surgieron diversas preguntas y opiniones sobre la formación de las ciencias, la construcción del conocimiento o la educación de las niñas y mujeres a través de la historia, todas ellas fueron oportunidades valiosas para dialogar y discutir sobre estos aspectos.

Siguiendo con esta secuencia didáctica se presentó la revista “The Ladies’ Diary”, su contexto histórico y relevancia para la época y se compartió el problema 1. Es posible acondicionar este problema de varias formas, generalmente lo presentamos en dos partes.

Problema 1 – Parte 1

Si en un minuto logro contar $100 sin interrupciones:

a. ¿Cuántos minutos me llevaría contar $1.000.000?

b. ¿Cuántos días, horas y minutos serían aproximadamente?

Los estudiantes trabajaron en grupos, favoreciendo así la comunicación y el intercambio de ideas, la docente escuchó, orientó y alentó a la realización del mismo. En la puesta común se observaron diferentes tipos de resoluciones, por tanteo realizando multiplicaciones, efectuando divisiones, regla de tres, o expresando los datos en columnas, es valioso que los estudiantes sean los protagonistas de ese momento y logren expresar sus ideas al colectivo. En esta instancia la docente intentó que los estudiantes observen como todos los procesos se vinculan entre sí, validando la diversidad y expresiones de pensamiento. Con esa motivación presente se propuso trabajar con la segunda parte del problema 1 de forma individual.

Problema 1 – Parte 2

Suponiendo que un año tiene 365 días, 5 horas y 45 minutos ¿cuántos años aproximadamente me llevaría contar un millón de millones?

En esta parte de la actividad se detectaron obstáculos en la concepción, escritura y en los cálculos que involucran al número un millón de millones, lo que brindó la posibilidad de trabajar con este número y se profundizaron los conocimientos sobre notación científica y el uso de la calculadora. Además, se observaron problemas con los usos de los puntos y coma de los diferentes sistemas de notación decimal y la interpretación de los resultados de las operaciones realizadas, lo cual propició el espacio para esclarecer dichos temas.

Por otro lado, los estudiantes que presentaron sus ideas en el colectivo en la primera parte de la actividad generalmente aplican ese conocimiento para continuar con la resolución de la segunda parte y los que no lo logran la primera vez, sí lo intentan con más confianza y afinidad en esta segunda oportunidad.

Si bien la adivinanza no desarrolla ningún contenido matemático la aplicación de esta nos vuelve a situar en la época que Mary Somerville vivió y se educó y nos abre el camino para el segundo problema.

A continuación, comparto una posible adecuación al problema 2.

Problema 2

Si multiplicas mi edad por 6 y le sumas el doble de ella, más el triple de ella y le agregas 3 veces 3, obtendrás 130 años en total. ¿Cuántos años tengo?

Con este problema también se observaron diferentes formas de resolución, por tanteo, realizando operaciones o plateando una ecuación. Nuevamente nos ofrece la oportunidad de valorar las prácticas matemáticas de nuestros estudiantes.

Reflexiones finales

En primer lugar, conocer la vida y obra de Mary Somerville es un hallazgo que a nivel personal nos motivó y entusiasmó compartir, no sólo con los estudiantes y compañeros docentes, sino con todo nuestro entorno. Creemos que es un ejemplo de lucha frente a todas las adversidades provenientes del sistema social y político, además de su invaluable contribución en el desarrollo y divulgación de las ciencias.

En segundo lugar, queremos destacar el interés que se observó por parte de los estudiantes en conocer a Mary Somerville lo que derivó en un mayor entusiasmo en la resolución de las actividades.

Por último, utilizar los recursos históricos como herramientas motivacionales o afectivas implica que los estudiantes no sólo experimenten las actividades como un desafío matemático, sino que las doten de significado por su contexto histórico, re-construyéndolas y apropiándoselas para que sean parte de su saber.

Referencias bibliográficas

Figueiras, L., Molero, M., Salvador, A. y Zuasti, N. (1999). *Género y Matemáticas*. Editorial Síntesis.

Forgasz, H. (2020). Gender in mathematics education. En S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of mathematics education* (2nd ed., pp. 243–247). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-15789-0_64

Molfino, V., y Ochoviet, C. (2021). *¿Qué mensajes da una serie de ejercicios de matemática acerca de los roles de género? Revista Binacional Brasil-Argentina: Diálogo Entre as Ciências, 10*(01), 312–329. https://doi.org/10.22481/rbba.v10i01.8192

Organización de las Naciones Unidas para la Educación, la Ciencia y la Cultura (2019). *Descifrar el código: la educación de las niñas y mujeres en las ciencias, tecnología, ingeniería y matemáticas (STEM)*. https://unesdoc.unesco.org/ark:/48223/pf0000366649

Simón, M., Farfán, R. y Rodríguez, C. (2022). Una perspectiva de género en matemática educativa. *Revista Colombiana de Educación,* (86), 235-254. https://doi.org/10.17227/rce.num86-12093

Swetz, F. (2018). The Ladies Diary': A True Mathematical Treasure. *Convergence.* Pennsylvania State University.

Un ciclo de Lesson Study en torno a una clase de matemática para la formación en geometría de futuros maestros y profesores de matemática

Fernando Espantoso[1], Jimena Fernández[2], Daniela Pagés[3], Mónica Olave[4]

[1] nanespan@gmail.com. Instituto de Profesores Artigas. Uruguay.

[2] surrumbu@gmail.com. Instituto de Formación Docente de La Costa. Uruguay.

[3] danielapages@gmail.com. Universidad de la República. Uruguay.

[4] monicaolave23@gmal.com. Instituto de Profesores Artigas. Uruguay.

Tema: Investigación didáctica

Modalidad: Conferencia simultánea

Nivel educativo: Superior

Resumen: *Presentamos el reporte de una investigación que se realiza en el marco de un proyecto financiado a través del programa PRADINE (CFE). Esta investigación consiste en la realización de un ciclo del Estudio de Clases, enfocado en la planificación colectiva de una clase para la formación de maestros y de profesores, y su posterior discusión conjunta. En particular, nos centramos en una clase desarrollada a partir de una tarea de final abierto. Utilizaremos el modelo Enseñanza para un sólido entendimiento (TRU) como marco teórico para todas las etapas del ciclo del Estudio de clases. Esta investigación tiene dos objetivos. Por un lado, estudiar el impacto de la implementación de tareas cognitivamente demandantes de geometría, diseñadas colectivamente, en dos grupos de formación docente. En segundo lugar, analizar el proceso reflexivo de los formadores participantes en el trabajo colectivo de planificación y el análisis posterior a la implementación. En esta comunicación presentamos los resultados de la etapa de planificación conjunta de las clases. Estos son: la tarea diseñada, el análisis a priori de las posibles resoluciones de los estudiantes y la planificación detallada de la clase. También presentamos el marco TRU como estructurador de las reflexiones de los formadores participantes.*

Palabras claves: *Estudio de Clases, formación de docentes en matemática, trabajo colaborativo, desarrollo profesional docente.*

Introducción

Las prácticas docentes habituales no suelen compartirse con los colegas. Si bien las y los docentes, en un centro educativo, comparten algunos aspectos de su tarea (materiales, acuerdos temáticos para las evaluaciones, entre otros), la planificación de las clases y su gestión quedan reducidas al trabajo en solitario del profesor. Como consecuencia de lo anterior las creencias de cada docente (sobre la matemática, su naturaleza, su enseñanza y su aprendizaje) no son problematizadas. Esto genera una perpetuación de un tipo predominante de clases, que en muchos casos deviene en una clase tradicional en donde el papel del docente es presentar un conocimiento ya construido y acabado y el de las y los estudiantes tomar notas, memorizar definiciones y procedimientos para luego aplicarlos. La investigación en Educación Matemática, en los últimos años, ha enfatizado en el trabajo colaborativo de equipos de docentes (Borko y Potari, 2020; Robutti et al., 2016) como forma de superar el desarrollo profesional individual, y evidenciar sus conocimientos y creencias, para poder problematizarlos.

Por otro lado, desde la investigación se señala que lo que aprenden hoy las y los estudiantes depende en gran medida de las tareas que les fueron propuestas durante su formación. Así, el diseño de tareas es un foco importante en la investigación en Educación Matemática. De acuerdo con Watson y Ohtani (2021), el foco en el diseño de tareas es relevante desde distintas perspectivas.

> Desde una perspectiva cognitiva, el detalle y contenido de las tareas tiene un efecto significativo en el aprendizaje; desde una perspectiva cultural, las tareas moldean la experiencia de los estudiantes con la asignatura y su comprensión de la naturaleza de la actividad matemática; desde una perspectiva práctica, las tareas son el cimiento de la vida de la clase, las 'cosas para hacer'. (p. 3)

A partir de lo anterior, nos enfocamos en la planificación colectiva de una clase para la formación de maestros y de profesores de matemática, y la discusión conjunta posterior a su implementación.

Objetivos y preguntas de investigación

Para la investigación se formularon las siguientes preguntas de investigación:

- ¿En qué medida las tareas cognitivamente demandantes (por ejemplo, de final abierto) potencian un aprendizaje disciplinar sólido y flexible de las y los futuros profesores?
- ¿Qué aporta el proceso colectivo de planificación, implementación y discusión posterior de las clases a las prácticas de las y los formadores participantes?

Para responder a estas preguntas, establecimos los siguientes objetivos.

Objetivo general

Contribuir a la formación de los futuros docentes en el área de matemática, a través de un proceso colaborativo de planificación, implementación y análisis posterior de una secuencia de enseñanza.

Objetivos específicos

1) Estudiar el impacto de la implementación de tareas cognitivamente demandantes de geometría, diseñadas colectivamente, en el aprendizaje de las y los alumnos de dos grupos de formación docente.

2) Analizar el proceso reflexivo de las y los formadores participantes en el trabajo colectivo del diseño de la tarea, la planificación de la clase a implementar y el análisis posterior a la implementación.

En este escrito nos centraremos en las dos primeras fases del ciclo de Estudio de Clases (Lesson Study, en adelante LS) llevado adelante entre formadores de matemática para magisterio y profesorado de matemática. Esto es, la determinación de objetivos de largo plazo y el proceso colectivo de planificación de la clase. Esta se implementó en cursos de profesorado (Geometría I) y de magisterio (Matemática I) del Plan 2008.

Marco conceptual

Con el fin de elaborar las tareas de enseñanza y analizar lo sucedido en las clases utilizamos: los aportes de Zaslavsky (1995, 2008) centrándonos en las tareas de final abierto, y el marco de referencia Teaching for Robust Understanding Project (en adelante TRU) elaborado por Schoenfeld (2016).

Marco TRU

El marco TRU establece que la calidad de los ambientes de aprendizaje depende, en gran medida, del grado en que se les proporcionen a todos los y las estudiantes oportunidades con respecto a cinco dimensiones de un aula matemáticamente poderosa, que describimos a continuación.

Contenidos

Refiere al grado en el cual la actividad en el aula es capaz de proporcionar oportunidades para que las y los estudiantes se conviertan en pensadores disciplinares flexibles, con conocimiento y con recursos. Las discusiones deberán estar dirigidas a poder aprender ideas, técnicas y perspectivas disciplinares, hacer conexiones y desarrollar hábitos de pensamiento matemático productivo. El contenido matemático que llevamos al aula debe ser preciso, coherente y estar bien justificado.

Demanda cognitiva

Schoenfeld (2016) sostiene que las y los estudiantes aprenden mejor cuando se les desafía de modo que tengan espacio y apoyo para el crecimiento, con tareas que les brinden la oportunidad de confrontar y entender importantes ideas matemáticas y su uso. Tareas que les permitan pensar conceptualmente y los estimulen a hacer conexiones dándoles oportunidades significativas para aprender. La demanda cognitiva describe el nivel de dificultad de la propuesta en relación con lo que el estudiante sabe y del trabajo que le requiere resolver la tarea.

Acceso equitativo al contenido

Ante todo se deben elaborar tareas que inviten y apoyen la participación activa de todas y todos los estudiantes. Para ello el docente debe generar un ambiente de aprendizaje que brinde a las y los estudiantes oportunidades de discutir ideas importantes, que se involucren con el contenido y construyan su entendimiento con base en los conocimientos que traen consigo al aula. Aquí es fundamental que las tareas puedan ser abordadas de diferentes formas para permitir que todas y todos los estudiantes se involucren con el contenido.

Disponibilidad, dominio e identidad

Esta dimensión hace referencia al grado en el que el estudiante tiene oportunidad de hacer matemática y comunicar sus ideas. Las actividades deberán proporcionar al estudiante la oportunidad de contribuir en conversaciones sobre ideas matemáticas, retomar las ideas de otros, y dejar que otros retomen las propias, de manera que contribuya al desarrollo de su disponibilidad (capacidad y voluntad de involucrarse) y dominio sobre el contenido, identificándose positivamente como aprendiz y pensador.

Evaluación formativa

En este marco se llama evaluación formativa a escuchar la voz de las y los estudiantes y actuar en consecuencia, que involucra tanto a docentes como a estudiantes, en nuestro caso, futuros profesores y maestros.

De acuerdo con la descripción hecha podemos observar los vínculos existentes entre las cinco dimensiones. Escuchar la voz de las y los estudiantes a través de sus aportes y de compartir y criticar ideas en forma conjunta, proporciona información a todas y todos sobre la marcha y el desarrollo de las ideas que se manejan y así poder actuar en consecuencia. Esta evaluación formativa (dimensión 5) permite al o la docente ajustar el nivel de la demanda cognitiva (dimensión 2) y así abre las puertas a la voz de cada estudiante (dimensión 4). A su vez, si el o la docente establece las condiciones que apoyen y alienten a las y los estudiantes a participar y propone tareas que tengan varias puertas de entrada, está ayudando a que el acceso a las ideas y razonamientos matemáticos sean equitativos (dimensión 3). Estos vínculos, que son propiciados por las actividades de clase (tareas, intervención docente, interacciones alumno-alumno y profesor-alumno), se presentan en la figura 1.

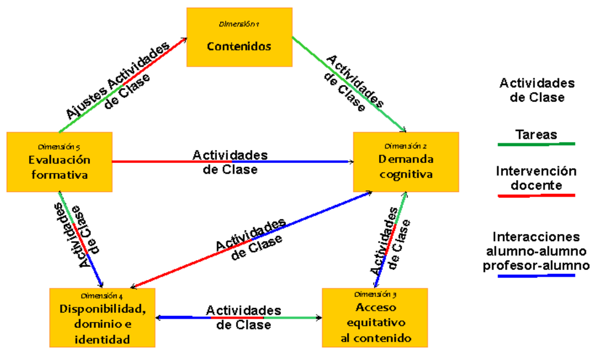


Figura 1: Vínculos entre las cinco dimensiones del marco TRU

Tareas de final abierto

A partir de las consideraciones del marco TRU y de los objetivos de la investigación, hemos visto la necesidad de elaborar tareas para la clase que privilegien las cinco dimensiones antes descritas.

Es por ello que hemos optado por trabajar con tareas de final abierto, es decir, tareas que tengan múltiples soluciones y además, diferentes caminos o formas de resolución, presentadas por Zaslavsky (1995, 2008).

Zaslavsky (2008) destaca que el hecho de que la tarea tenga múltiples respuestas permite que cada estudiante pueda tener algún éxito, esto es, que pueda dar al menos una respuesta correcta trabajando a su manera y a su nivel. Esto lleva a que los y las estudiantes comparen sus respuestas con las de otros compañeros, verifiquen su validez y busquen relaciones entre ellas, pudiendo incluso llegar a generalizaciones. Este tipo de tareas resultan desafiantes, aportan a crear un ambiente de mutua colaboración y promueven la comunicación matemática, así como también otras situaciones deseables de aprendizaje que van en la línea de las planteadas por el marco TRU.

Metodología

Para este estudio utilizamos la metodología del LS, forma de trabajo colaborativo entre docentes e investigadores. Este tiene como principales objetivos el desarrollo profesional de las y los docentes, el mejoramiento de los aprendizajes de las y los estudiantes y el surgimiento de teorías de enseñanza de la matemática (Isoda, 2015). Esta metodología se lleva adelante por ciclos. Cada ciclo consta de cuatro fases principales: la determinación de objetivos de largo plazo, la planificación colectiva de la clase y el diseño de las tareas a presentar, la implementación y observación de la clase, y el análisis, discusión y reflexión de lo sucedido en el aula.

En esta investigación el énfasis principal está en la contribución a la enseñanza de la matemática y en la formación de futuros docentes, a través de un proceso colaborativo de planificación, implementación y análisis posterior de una propuesta de enseñanza. De acuerdo con los lineamientos de LS, hemos determinado como tema de estudio, analizar las formas en que puede promoverse el desarrollo, en las y los futuros docentes, del Conocimiento Matemático para Enseñar (Ball, Thames y Phelps, 2008), en términos generales. Para ello, en este ciclo del LS, hemos optado por diseñar e implementar una tarea de final abierto y desarrollar la clase acorde a las dimensiones del marco TRU.

Planificación colectiva de la clase y las tareas a presentar

El proceso de planificación colectiva se inició con el análisis de las distintas unidades de los programas de los cursos de Geometría I del profesorado de matemática y de Matemática I de magisterio. Además, el equipo analizó documentos provenientes de la investigación en Educación Matemática (vinculados especialmente con la enseñanza y el aprendizaje de la geometría). Luego nos abocamos a diseñar o seleccionar una tarea para la clase investigativa. Partimos de distintas ideas aportadas por los integrantes del equipo, y finalmente seleccionamos una de las propuestas como base para el diseño. Se dedicaron doce sesiones a todo el proceso de planificación.

El diseño de la tarea y la planificación detallada de la clase implicó considerar, en primer lugar, todas las resoluciones posibles de la tarea por parte de las y los estudiantes, las ideas matemáticas que se pondrían en juego en cada una de ellas. Estas resoluciones posibles nos permitieron imaginar distintos escenarios para la puesta en común, así como pensar las posibles intervenciones docentes. También, decidir qué conocimientos se institucionalizarían durante el trabajo de todo el grupo. Este trabajo de discusión y toma de decisiones se realizó durante doce sesiones, que fueron videograbadas. De ellas surgió la tarea diseñada, que es de final abierto. En la planificación de la clase se trató de privilegiar las cinco dimensiones del marco TRU.

La tarea

Las redes de los arcos de fútbol fueron históricamente diseñadas a partir de una retícula cuadrada.

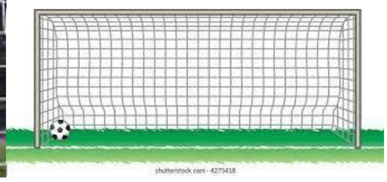


Foto del partido Uruguay y Ghana en la Copa del Mundo de Sudáfrica 2010

1) ¿Qué otros polígonos se pueden utilizar para diseñar una red de un arco de fútbol? Presenta al menos los diseños de dos ejemplos distintos utilizando el mismo polígono, con los que se pueda formar una red. ¿Cómo justificarías que tus diseños realmente funcionan? En otras palabras, ¿por qué la figura que elegiste forma realmente una red?
2) ¿Existe alguna figura con la que no se pueda formar una red? Justifica.

Esta tarea puede ser abordada de diferentes maneras, tiene muchas puertas de entrada lo que puede permitir que el acceso a las ideas y razonamientos matemáticos sean equitativos. Tiene múltiples soluciones, lo que promueve que cada estudiante, desde sus conocimientos, proporcione alguna respuesta y su respectiva justificación. Esto último está en consonancia con la dimensión 3 del marco TRU ya que estaría permitiendo un acceso significativo y equitativo a los conceptos y las prácticas.

A partir de los diseños presentados por las y los estudiantes se pueden inducir propiedades de los polígonos involucrados y permitir que se justifiquen, que se vinculen diferentes tópicos matemáticos, entre otros aspectos de la actividad propia de la asignatura. Estas actividades desarrolladas en el aula pueden ser un gran aporte al enriquecimiento de los conceptos y las prácticas disciplinares disponibles para aprender aspectos vinculados a la dimensión 1 (contenidos).

Esta forma de interactuar en clase nos brinda la oportunidad de escuchar la voz de las y los estudiantes a través de sus aportes, de compartir, aceptar y refutar ideas en forma conjunta. Esto proporciona información a los participantes acerca de la marcha y el desarrollo de las ideas que se manejan, de las diferentes formas de entendimiento que permite al colectivo generar un ambiente empático hacia formas de pensar del otro y así actuar en consecuencia (dimensión 5: la evaluación formativa). Esto último permite al docente, a través de la observación y análisis de las diferentes situaciones que se dan en la clase, secuenciar los contenidos de forma tal que la dificultad vaya de moderada a alta brindando a las y los estudiantes espacio para presentar sus argumentaciones y apoyo para el crecimiento en el pensamiento matemático (dimensión 2: demanda cognitiva, y dimensión 4: disponibilidad, dominio e identidad).

Planificación de la clase

A continuación presentamos la planificación de clase en donde se plantean los objetivos de la misma, el análisis a priori de la tarea que acabamos de presentar, el desarrollo tentativo de la clase y posibles intervenciones docentes.

Tema de la clase: Polígonos y sus propiedades. Clasificación de polígonos.

Objetivo de largo plazo: Que las y los futuros maestros y profesores de matemática desarrollen profundamente el Conocimiento Matemático para Enseñar (Ball et al., 2008).

Objetivos de la clase: Se trabajará para que las y los futuros docentes aborden la tarea planteada desde sus ideas matemáticas, y lleven adelante el desafío de resolverla; descubran que algunas figuras teselan el plano y otras no, y encuentren las condiciones para que esto ocurra; analicen y determinen relaciones entre las medidas de los ángulos interiores de polígonos, en particular su suma; puedan comunicar sus ideas, en todas las instancias, y las argumenten; sean capaces de rebatir las ideas de sus pares y acepten que los demás discutan las suyas; experimenten un modelo de clase distinto al que posiblemente vivieron en sus experiencias como estudiantes.

Análisis a priori

- Trabajar en base a la visualización y a la medición de los ángulos involucrados, y dar poca fundamentación matemática.

- Considerar triángulos equiláteros: partiendo de saber que cada ángulo mide 60 grados, concluir que con seis triángulos equiláteros iguales conforman 360 grados en un vértice.
- Consideración de "otros" triángulos: podría aparecer la propiedad de la suma de los ángulos interiores.
- Consideración de paralelogramos. Pueden considerar la suma de los ángulos internos, poner en juego las condiciones de paralelismo y las relaciones entre los distintos ángulos entre paralelas (correspondientes, opuestos por el vértice, etc.).
- Utilizar hexágonos regulares. Se puede fundamentar a partir de la configuración con triángulos equiláteros. Podría utilizarse como fundamentación alguna de las isometrías del plano, en especial en el grupo de profesorado.

Nuestra hipótesis es que no se considerarán polígonos no convexos. Se llevarán, para ser usados si es necesario, representaciones de polígonos convexos y no convexos en cartulina.

Para el caso de los no ejemplos (polígonos que no son solución del problema planteado), si algún grupo hubiera considerado un pentágono regular, se analizará ese caso como no solución a la actividad.

Desarrollo tentativo de la clase

Se plantea la actividad para trabajar en grupos de no más de cinco integrantes. Se pedirá a las y los estudiantes que presenten sus ejemplos en un papelógrafo que se les entregará junto con la actividad, para ser expuestos en la puesta en común. Se darán unos minutos para leer la actividad y plantear las dudas iniciales que surjan. Luego se les dejará trabajar. El docente monitoreará cada grupo observando las distintas producciones y evaluando en cada caso si amerita una intervención o no. Este monitoreo servirá para seleccionar y secuenciar la posterior puesta en común.

Posibles intervenciones durante el trabajo en equipos

Si alguien manifiesta conocer GeoGebra y quiere usarlo, se le permitirá. En caso de que las fundamentaciones pedidas se den en base a la manipulación de las figuras, o la medición, sin argumentos matemáticos, se intervendrá para que piensen en otras fundamentaciones posibles (poniendo en duda la veracidad del ejemplo o no ejemplo presentado). En caso de que en el total de los grupos haya poca variedad de polígonos, a los grupos que terminan pronto se les pedirá que piensen en considerar otros polígonos. Se les proporcionarán las representaciones en cartulina a las y los estudiantes que luego de cierto tiempo se encuentren estancados, o a aquellos que finalicen la tarea muy rápido.

Puesta en común

Para iniciar la puesta en común, se pedirá a todos los grupos que expongan sus producciones en el frente del salón, para que todos puedan observar las producciones de sus compañeros.

Durante el monitoreo, se habrá seleccionado en qué orden los distintos grupos presentarán sus resoluciones. Se seleccionará en función de las figuras utilizadas y de los argumentos planteados, de menor a mayor complejidad de acuerdo con las propiedades de los polígonos involucrados. Cuando un grupo presenta sus diseños, y da su fundamentación, se solicitarán las fundamentaciones de otros grupos que hayan hecho el mismo diseño, y se pondrá a discusión de toda la clase la validez o no de esos argumentos. En la medida en que las argumentaciones estén fundadas en propiedades de los polígonos, estas se establecerán como relaciones generales. Se continuará de la misma forma con los demás grupos que hayan utilizado otros polígonos. Se analizarán de forma similar los casos de los no ejemplos.

En el cierre de la puesta en común se establecerán las condiciones para un recubrimiento del plano, así como cuáles son los polígonos regulares que lo teselan.

Pensamos que todo este trabajo llevará los 90 minutos de clase.

Implementación y observación de la clase

La clase planificada fue implementada en un grupo de primer año de Magisterio, en la asignatura Matemática I, y en un grupo de primer año de profesorado de matemática, en la asignatura Geometría I. Para esta etapa hemos elaborado un protocolo de observación de clase, basado en el marco TRU. La observación individual estará guiada por dicho protocolo. Este también nos permitirá ordenar y focalizar la discusión colectiva posterior de modo de abordar el primer objetivo de nuestra investigación: estudiar el impacto de la implementación de tareas cognitivamente demandantes de geometría, diseñadas colectivamente, en el aprendizaje de las y los alumnos de dos grupos de formación docente (Ball et al., 2008).

Protocolo de observación de clase

Hemos elaborado un protocolo de observación de clase que tiene en cuenta las cinco dimensiones descritas en el marco TRU (Ver Anexo 1). Para seleccionar los indicadores dentro de cada una de estas dimensiones se tuvieron en cuenta las actividades de clase, esto es, la tarea de final abierto elaborada, el monitoreo e intervención docente y los aportes que realicen las y los estudiantes en la clase.

Pensamos que la inclusión de estos indicadores nos permitiría abarcar una amplia gama de posibilidades en el desarrollo de la clase y nos brindaría insumos para la discusión posterior de la clase (tercera etapa del ciclo del LS).

Debemos aclarar que hay un indicador, que consideramos muy importante y que tendremos en cuenta, que no figura explícitamente en el protocolo de observación ya que está vinculado en las cinco dimensiones. Se trata de la especificidad de la formación de profesores y maestros en el área de la matemática, es decir la consideración del *conocimiento especializado del profesor* (Ball et al., 2008) que debe tener un maestro y un profesor de matemática. Tendremos muy en cuenta las consideraciones, decisiones y acciones que el docente lleve adelante en la clase, fundadas en esta especificidad.

A modo de cierre

Del análisis realizado sobre todos los datos de esta investigación surgen varias conclusiones. Por un lado, la tarea se mostró potente para que las y los estudiantes la abordaran en distintos niveles de complejidad, y la labor de los formadores contribuyó al desarrollo de discusiones productivas y a la resolución de las dificultades que surgieron durante las clases.

Por otro lado, una vez implementadas las clases, y durante las discusiones posteriores, pudimos identificar la potencia del proceso detallado de planificación que supone la metodología del LS. En efecto, el esfuerzo colectivo de anticipar distintas resoluciones y soluciones, formas de pensamiento (correctas o erróneas) de los estudiantes, así como pensar posibles intervenciones docentes, mostró un efecto positivo durante la implementación de las clases investigativas. Al mismo tiempo, permitió hacer un análisis comparativo entre la planificación y lo realmente sucedido y, por ejemplo, retomar aspectos problemáticos o no totalmente claros del enunciado de la tarea. Por ejemplo, en las dos preguntas de la actividad, en lugar de utilizar la palabra *polígono*, como se venía haciendo, se escribió *figura*. Esto llevó a que algunos estudiantes consideraran figuras que no eran polígonos.

Pensamos que la metodología del LS es una herramienta poderosa para ser aplicada entre docentes o formadores, pero también podría implementarse en la formación docente, específicamente durante la práctica docente.

Un trabajo colaborativo de largo plazo, como el que se promueve desde la metodología de LS, permite el desarrollo de procesos de reflexión (Ricks, 2011). De forma particular, permite el desarrollo de nuevo conocimiento para enseñar de quienes participan, fundado en la práctica. LS impone ciertos plazos para el trabajo del equipo (Fujii, 2017). No es un proceso que pueda llevarse adelante en unos pocos días, sino que son necesarias muchas reuniones para realizar una planificación exhaustiva, y otras tantas para la discusión posterior a la implementación de las clases. Se establece así un terreno fértil para el examen y la discusión profunda, lo que permite procesos reflexivos y el refinamiento de ideas.

Referencias bibliográficas

Ball, D. L., Thames, M. H. y Phelps, G. (2008). Content Knowledge for Teaching: What Makes it Special? *Journal of Teacher Education, 59*(5), 389–407.

Borko, H. y Potari, D. (Eds.). (2020). Teachers of Mathematics Working and Learning in Collaborative Groups. *ICMI Study 25 Conference Proceedings.*

Fujii, T. (2017). Lesson study and teaching mathematics through problem solving: The two wheels of a cart. En M. Quaresma, C. Winsløw, S. Clivaz, J. P. da Ponte, A. Ní Shúilleabháin y A. Takahashi (Eds.), *Mathematics lesson study around the world: Theoretical and methodological issues* (pp. 1–21). Springer.

Isoda, M. (2015). The science of lesson study in the problem solving approach. En M. Inprasitha, M. Isoda, P. Wang-Iverson y B. Yeap (Eds.). Lesson Study. Challenges in Mathematics Education. *Series on Mathematics Education, 3*, 81-108.

Ricks, T. E. (2011). Process Reflection during Japanese Lesson Study Experiences by Prospective Secondary Mathematics Teachers. *Journal of Mathematics Teacher Education, 14*(4), 251–267.

Robutti, O., Cusi, A., Clark-Wilson, A., Jaworski, B., Chapman, O., Esteley, C., Goos, M., Isoda, M. y Joubert, M. (2016). ICME International Survey on Teachers Working and Learning through Collaboration. *ZDM Mathematics Education, 48*, 651-690. https://doi.org/10.1007/s11858-016-0797-5

Schoenfeld, A. H. (2016). *The Teaching for Robust Understanding Project. An Introduction to the Teaching for Robust Understanding (TRU) Framework.* Graduate School of Education. Recuperado de http://map.mathshell.org/trumath.php

Watson, A. y Ohtani, M. (2021). Task Design in Mathematics Education. Springer Open. https://doi.org/10.1007/978-3-319-09629-2

Zaslavsky, O. (1995). Open-ended tasks as a trigger for mathematics teachers´ professional development. *For the Learning of Mathematics, 15* (3), 15-20.

Zaslavsky, O. (2008). Meeting the challenges of mathematics teacher education through design and use of tasks that facilitate teacher learning. En Jaworsky, B. y Wood, T. (eds.), *The Mathematics Teacher Educator as a Developing Professional*, 93-114.

Anexo 1

Protocolo de observación de clase

Contenido	- En qué medida las discusiones matemáticas son precisas y coherentes
	- Qué relaciones se establecen entre el contexto, los conceptos y los procedimientos
Demanda cognitiva	*Las actividades de clase* (la tarea, la intervención docente y la participación de los estudiantes)*:*
	- generan y mantienen un ambiente de producción intelectual desafiante
	- generan un desarrollo matemático de los estudiantes
Acceso equitativo al contenido	*Las actividades de clase (tareas, intervención docente):*
	- invitan a una activa participación de todos los estudiantes
	- ¿quién propone ejemplos?
	- ¿quién explica?
Disponibilidad, domino e identidad	*Los estudiantes, en qué medida tienen oportunidad de:*
	- conjeturar
	- explicar
	- representar
	- generalizar
	- refutar o aceptar ideas ajenas
	- refutar o aceptar ideas propias
	Estas actividades
	- ¿dejan en evidencia las contribuciones de los estudiantes?
	- animan al estudiante a involucrarse (desarrollo de la *disponibilidad*)
	- posibilitan que el estudiante evolucione en el *domino* del contenido
	- permiten que el estudiante genere una *identidad* como pensador matemático
Evaluación formativa	*La tarea presentada*:
	- ¿revela el estado real de entendimiento del estudiante?
	- ¿permite atender asertivamente las dificultades grupales e individuales?
	El docente:
	- a partir del monitoreo de la actividad de los estudiantes, ¿interviene para ajustar el nivel de la demanda cognitiva?

Las tareas para la clase de matemática: análisis de su demanda cognitiva y formas de implementarlas

Daniela Pagés[1], Verónica Scorza[2]

[1] danielapages@gmail.com. Universidad de la República. Uruguay.

[2] verosco@gmail.com. Consejo de Formación en Educación. Uruguay.

Tema: Formación de profesores y maestros

Modalidad: Taller

Nivel educativo: Secundaria

Resumen: *La selección o el diseño de actividades para la clase constituye un aspecto medular de la tarea docente. Una vez elegida la tarea, cobra importancia pensar la forma en que la presentamos a los estudiantes, y los modos en que promovemos que ellos se involucren en su resolución. En este taller de desarrollo profesional docente presentamos un marco para el análisis de la demanda cognitiva de una tarea para la clase, así como un modelo de prácticas de planificación e implementación de estas, con el fin de sostener su demanda cognitiva potencial. Se presentaron distintos tipos de tareas para analizar su demanda cognitiva, se diseñaron tareas y se discutió en torno a la potencialidad de su demanda cognitiva. Se analizó una tarea en particular, anticipando posibles resoluciones de los estudiantes y se discutió acerca de las conexiones matemáticas que pueden realizarse en la clase, a partir del trabajo de los alumnos.*

Palabras claves: *desarrollo profesional docente, tareas cognitivamente demandantes, discusiones productivas, conocimiento matemático.*

Introducción

Desde la investigación en Educación Matemática se señala que el tipo de tareas que proponemos a nuestros estudiantes determinan, en gran medida, el aprendizaje que estos desarrollan (Doyle, 1988). Las tareas son entonces un aspecto medular de la clase y son importantes para el aprendizaje de los alumnos pues "las tareas transmiten mensajes de lo que son las matemáticas y lo que implica hacerlas" (NCTM, 2000, p. 22). Hiebert y Wearne (1993) señalan que es probable que diferentes tipos de aprendizaje se induzcan dependiendo de los diferentes procesos cognitivos que requieran las tareas que se proponen. Si bien no es fácil determinar exactamente qué procesos aplican los alumnos para realizar las tareas, es esencial analizar y comprender las tareas que se les asignan para entender cómo influye la enseñanza en el aprendizaje.

Por ejemplo, supongamos que a un grupo de estudiantes se le proponen las siguientes tareas:

Tarea 1	Tarea 2
Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones: $\begin{cases} y=300+x \\ y=500+12x \end{cases}$	Estás tratando de decidir cuál de dos planes tarifarios para teléfonos celulares inteligentes convendría más. El plan A cobra una renta básica de \$300 al mes y \$1 por mensaje de WhatsApp. El plan B cobra una renta mensual de \$500 y \$0,50 por mensaje. ¿Cuántos mensajes se necesitaría mandar al mes con el plan B, para que fuese la mejor opción? Justifica tu decisión.

Figura 1: Tareas para la clase (extraída y modificada de NCTM, 2015, p. 21)

Nos preguntamos: ¿Qué similitudes y diferencias se pueden encontrar entre las dos tareas? ¿Qué trabajo le demandaría a un estudiante de tercer año de ciclo básico (14 años) resolver cada una de las tareas? ¿Qué aprendizajes sería posible lograr con una y con la otra?

Estas preguntas nos llevan a introducir el concepto de demanda cognitiva de una tarea que presentaremos y analizaremos en la sección siguiente.

Demanda cognitiva de una tarea

Para este trabajo adoptamos el abordaje realizado por Stein et al. (2000), que analiza el grado de demanda cognitiva de las tareas a proponer en la clase. Por demanda cognitiva los autores entienden "el tipo y nivel de pensamiento requerido de los estudiantes para que se involucren exitosamente en la tarea y la resuelvan" (p. xxiv). De acuerdo con el marco desarrollado por estos autores, llamado Guía de Análisis de Tareas, se pueden distinguir diferentes tipos de tareas, con relación a su nivel de demanda cognitiva: de memorización, de procedimientos sin conexiones, de procedimientos con conexiones y de hacer matemática. Los dos primeros tipos refieren a tareas de bajo nivel de demanda cognitiva y los dos últimos a tareas de alto nivel de demanda cognitiva.

A continuación, presentamos ejemplos de cada uno de los tipos de tareas:

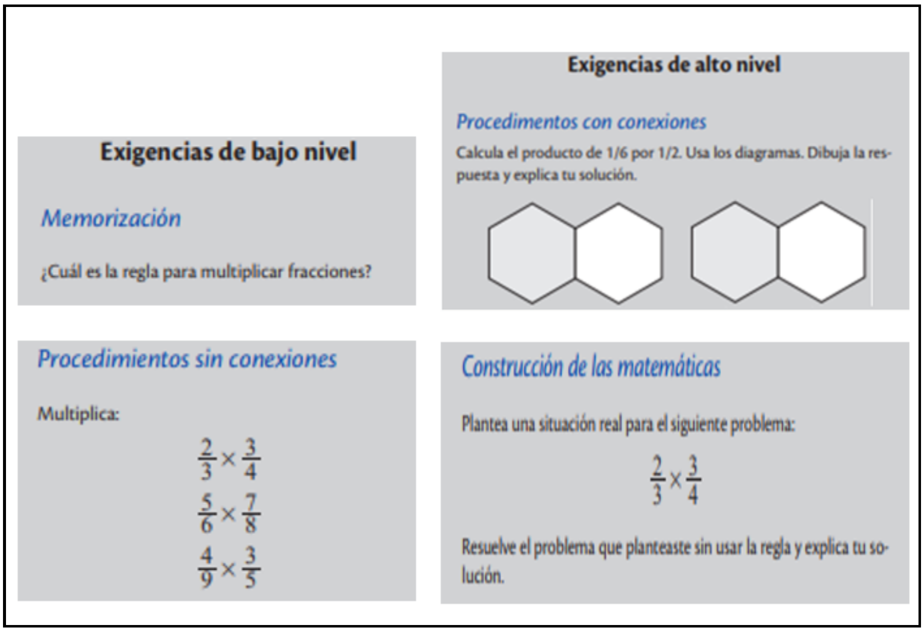


Figura 2: Características de las tareas matemáticas en cuatro niveles de exigencia cognitiva
(modificado de NCTM, 2015, p. 20)

Las tareas del tipo de memorización solo requieren que los estudiantes memoricen hechos, reglas, fórmulas y definiciones ya aprendidas. No son ambiguas ya que para resolverlas solo hay que recordar y reproducir lo ya aprendido. Este tipo de tareas no involucra ningún procedimiento de resolución, como sí lo requieren las tareas de procedimientos sin conexiones que se pueden resolver aplicando procedimientos ya aprendidos. Para lograr tener éxito en las tareas del tipo de procedimientos sin conexiones se requiere poco tiempo y un razonamiento limitado. En general hay poca ambigüedad en relación con lo que hay que hacer o cómo hacerlo, pues lo que hay que hacer para resolverla está explicitado en la consigna (por ejemplo, la tarea 1 de resolver un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas). Se focalizan en obtener respuestas correctas y no requieren de los estudiantes grandes explicaciones, solamente descripciones de lo que hicieron. Sin embargo, las tareas que requieren procedimientos con conexiones centran la atención de los estudiantes en los significados y conceptos que subyacen a los procedimientos necesarios para resolver la tarea. En la resolución de las tareas del tipo procedimientos con conexiones, los estudiantes no pueden utilizar sin sentido un procedimiento aprendido y deben entender qué es lo que están haciendo y poder explicarlo. Es posible que den lugar al uso de diferentes formas de representación y a conectarlas para desarrollar mayor comprensión del problema que están resolviendo (por ejemplo, la tarea 2 de los planes tarifarios). En cuanto a las tareas de hacer matemática, Stein et al. (2000) sostienen que son complejas e implican un nivel alto de exigencia o demanda cognitiva. Para poder resolverlas, requieren que se exploren diferentes caminos pues la tarea no sugiere un camino en forma explícita, predecible o trivial. Esto puede generar un poco de ansiedad en los estudiantes. Los procesos involucrados en este tipo de tareas no son algorítmicos, ni mecanizados, ni irreflexivos. En el proceso de resolución de la tarea es necesario que el estudiante se autorregule, que vaya verificando los resultados que obtiene y que analice las restricciones de la tarea que pudieran limitar las posibles estrategias de resolución y las soluciones de esta. Lograr resolver con éxito una tarea de este tipo puede demandar bastante tiempo de ejecución y esfuerzo.

Diversos factores pueden influir en el mantenimiento o no de la demanda cognitiva de una tarea durante una clase. Entre ellas se señalan las creencias y expectativas que tienen los docentes, las disposiciones y los hábitos de los estudiantes, las normas y prácticas que se establecen en la clase, las restricciones curriculares, la presión por completar el programa, entre otras (Charalambous, 2008).

Análisis de una tarea cognitivamente demandante

Como mencionamos anteriormente, el marco llamado Guía de Análisis de Tareas nos permite analizar el nivel de demanda cognitiva que estas tienen. Las tareas de alto nivel de demanda cognitiva y en particular las de hacer matemática merecen una atención especial. Concretamente, una de las tareas con las que trabajamos en el taller es, además, una tarea de final abierto (Zaslavsky, 1995) que fue diseñada modificando una tarea cerrada propuesta en un libro de texto para alumnos de primer año de ciclo básico (12 años). Las tareas de final abierto, en oposición a las estándar o cerradas (con una sola respuesta correcta), son aquellas que, aún basadas en contenidos familiares del currículo, admiten múltiples respuestas correctas. Consideramos que las tareas abiertas son tareas del tipo de hacer matemática. Esta consideración se basa en las reflexiones de Scorza (2016) con relación a una intervención didáctica realizada con profesores trabajando con tareas de final abierto:

> Los profesores participantes lograron reconocer en las tareas de final abierto potencialidad para instaurar en el aula una metodología de trabajo que emule la actividad del matemático en cuanto a que con ellas se fomenta la exploración, la discusión, la argumentación y la validación. Reconocieron también que con este tipo de tareas se

> fomenta el trabajo autónomo y en equipo de los estudiantes y que permiten que todos tengan la oportunidad de aportar algo como solución a las mismas. (p. 56)

A los participantes del taller se le presentaron las siguientes tareas y se analizó su potencial demanda cognitiva a la luz del marco de Stein (2000) y se anticiparon posibles resoluciones de la tarea 2 ubicándose en un grupo de tercer año de ciclo básico (14 años).

Tarea 1	**Tarea 2**
Calcula el perímetro de un triángulo isósceles del que se sabe que un lado mide 7 cm y otro mide 5 cm. (Modificada de Da Costa y Scorza, 2011, p. 125)	De un triángulo isósceles se sabe que su perímetro es de 17 cm. ¿Cuáles podrían ser las medidas de sus lados? (Modificado de Da Costa y Scorza, 2011, p.125)

Figura 3: Comparación de tareas (Tomado de Pagés y Scorza, 2022, p. 56)

Los participantes reconocieron la tarea 2 como potencialmente de alta demanda cognitiva, y del tipo de hacer matemática, argumentando que da lugar a la construcción de un nuevo conocimiento matemático: la desigualdad triangular. Algunas de las resoluciones que anticiparon[3] fueron las siguientes:

1) Los alumnos hacen dibujos para representar el problema y en los lados del triángulo escriben sus posibles medidas (algunas correctas y otras no, en el sentido de la posibilidad de construir el triángulo representado).

2) Los alumnos arman una tabla con tres columnas, cada una de ellas representando la medida de cada lado, y expresan la suma de esas medidas para verificar que sea 17 (al igual que el caso anterior, algunas son correctas y otras no).

3) Los alumnos expresan relaciones en lenguaje algebraico, por ejemplo,

$x+x+y=17$.

4) Los alumnos escriben que hay muchas posibilidades para las medidas de los lados del triángulo pero que no todas iban a "servir".

Diseño de los cuatro tipos de tareas

Se propuso la siguiente actividad a los participantes del taller.

[3] Para ver más estrategias de resolución de la tarea, consultar Pagés y Scorza (2022, pp. 64-66)

Elijan un tema cualquiera de alguno de los tres cursos de ciclo básico (12 a 14 años) y diseñen cuatro tareas, una de cada tipo que presentamos, es decir, una de cada nivel de exigencia cognitiva.

Para diseñarlas pueden, si lo desean, seleccionar una tarea de un texto y realizarle las modificaciones necesarias para convertirla en cada tipo.

Resuelvan cada tarea que diseñen y justifiquen por qué cada tarea es de cada tipo.

A continuación presentamos las producciones de uno de los grupos, que se centró en el concepto de mediatriz de un segmento. Presentaron las siguientes tareas:

Tarea de *memorización*: Define mediatriz de un segmento.

Tarea de *procedimientos sin conexiones*: ¿Cuáles de estos dibujos representa la mediatriz de un segmento?

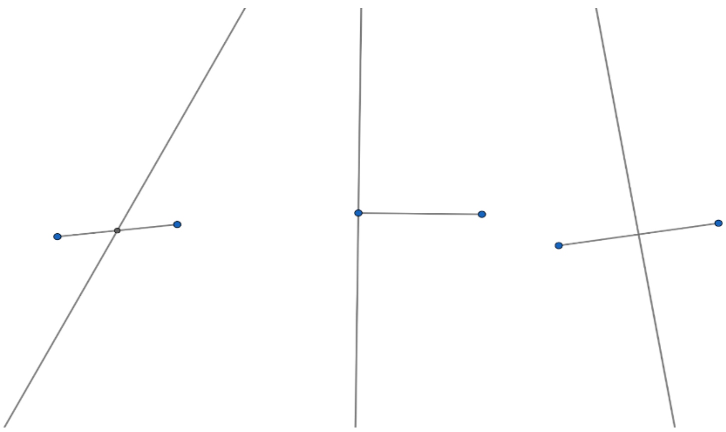


Fig. 4 Tarea de procedimientos sin conexiones (elaborada por un grupo de participantes al taller)

Tarea de *procedimientos con conexiones*: Busca puntos que equidistan de tres puntos dados no alineados.

Tarea de *hacer matemática*: Formula un problema que, en su resolución, involucre el uso de la mediatriz de un segmento.

Las discusiones durante la puesta en común de esta actividad giraron en torno a los siguientes aspectos.

Con respecto a la primera tarea planteada, hubo acuerdo en que era de *memorización*, aunque los estudiantes podrían evocar alguna de las definiciones correctas de mediatriz de un segmento, o alguna incorrecta.

La clasificación de la segunda tarea como de *procedimientos sin conexiones* generó discusión. Se planteó que los estudiantes, si elegían la primera representación, solo estarían evocando la propiedad del punto medio de un segmento de pertenecer a su mediatriz. Si seleccionaban la segunda representación, estarían evocando solamente la perpendicularidad entre la mediatriz y el segmento. La selección de la tercera representación se conectaba con la definición de mediatriz de un segmento como la perpendicular a este en su punto medio. De todos modos, los asistentes opinaron mayoritariamente que la tarea era de *procedimientos con conexiones*.

Con respecto a la tercera tarea presentada, hubo quien estuvo de acuerdo que era de *procedimientos con conexiones* en tanto para resolver la tarea se debe evocar no solo la definición de mediatriz de un segmento (como lugar geométrico) sino un procedimiento de cómo construirla. Además de conectar tal vez con el concepto de circuncentro de un triángulo. Pero también hubo quien cuestionó su pertenencia a esta categoría, entendiendo que podría ser clasificada como una tarea de hacer matemática, en tanto de la consigna de la tarea no se evidencia un camino evidente de resolución. Consideraron, además, que la palabra "equidista" parece no ser suficiente para evocar los conceptos y procedimientos que permiten resolver la tarea con éxito.

Otro aspecto que dio lugar a discusión fue que las figuras representadas no incluían los nombres de los puntos, la información sobre la perpendicularidad (en el segundo y tercer dibujo) ni el hecho de que el punto de intersección fuera el punto medio del segmento (para el caso de la tercera representación). Además se discutió que si los estudiantes evocaban la definición de mediatriz de un segmento como lugar geométricos no podrían reconocer ninguna de las figuras como una representación de la mediatriz de un segmento.

Implementación de una tarea para enseñar matemática en la clase

El análisis de la demanda cognitiva potencial de una tarea no es suficiente para garantizar que los estudiantes aprenderán los conceptos matemáticos que se pretenden enseñar a través de su resolución. Stein et al. (1996) estudiaron cómo se modifica una tarea, luego de que el docente la selecciona o diseña, cuando esta es presentada a los estudiantes (fase de lanzamiento), o durante el tiempo que los estudiantes trabajan con ella (fase de implementación). A este respecto, los autores señalan que una tarea que tiene una alta demanda cognitiva potencial puede declinar durante cualquiera de estas dos fases. Por ejemplo, porque los estudiantes demandan al docente que les dé pistas o indicaciones de cómo proceder, o porque el docente proporciona ayuda a los alumnos a partir de no desear que se sientan frustrados al enfrentarse a la tarea. Estos aspectos, en particular, hacen a las interacciones en la clase. (Pagés, 2015)

Si consideramos las fases en las que "vive" una tarea cuando esta es llevada a la clase, las acciones y decisiones del docente resultan muy relevantes. Es por esto por lo que consideramos importante promover, como una forma de planificar y gestionar una clase, un conjunto de prácticas que generen discusiones productivas, de lograr mantener, e incluso aumentar, la demanda cognitiva de una tarea implementada en la clase, con el fin de enseñar determinado conocimiento matemático. Presentamos el marco de cinco prácticas propuesto por Stein et al. (2008), que organizan la planificación del docente, así como sus acciones y decisiones durante la clase.

Una vez seleccionada la tarea que se quiere usar, se lleva adelante la práctica de *anticipar*. La tarea seleccionada se lleva a la clase y se presenta a los estudiantes. Esta etapa los autores la denominan fase de lanzamiento o presentación. Durante la fase de trabajo de los estudiantes con la tarea, que denominan fase de implementación, se dan las prácticas de *monitorear*, *seleccionar* y *secuenciar*. La última práctica, *conectar*, se da durante la puesta en común. A continuación describiremos cada una de las cinco prácticas.

Anticipar. Consiste en imaginar cómo los estudiantes podrán interpretar y resolver las tareas, las diversas estrategias que utilizarán, las relaciones de estas con los conceptos, procedimientos, representaciones que el docente quiere que los estudiantes aprendan. Esta práctica ayuda a confirmar que la tarea es de alta demanda cognitiva.

Monitorear las respuestas de los estudiantes. Esta práctica, que se desarrolla cuando los estudiantes están trabajando en la tarea, implica identificar su discurso cuando discuten, el potencial de aprendizaje matemático de sus estrategias o representaciones. El docente formula preguntas para evaluar el pensamiento de los estudiantes.

Seleccionar intencionalmente respuestas de estudiantes para mostrarlas en la puesta en común. Seleccionamos estudiantes de quienes conocemos sus resoluciones para obtener diversidad en cuanto a la matemática presente en estas. Esto hace más probable que las ideas matemáticas importantes sean tratadas efectivamente en la clase y no se pierdan durante la puesta en común.

Secuenciar intencionalmente las respuestas de los estudiantes. Elegir en qué orden presentarán sus producciones los distintos grupos o estudiantes permite maximizar las posibilidades de cumplir con los objetivos de la clase. Un ejemplo de esto es que estudiantes que resolvieron la tarea por un camino mayoritario, sean los que explican primero, dejando para después estrategias más sofisticadas. O también, se puede elegir comenzar con la discusión de una estrategia basada en un razonamiento erróneo.

Conectar las ideas de los estudiantes. Consiste en ayudar a los estudiantes a establecer conexiones matemáticas entre las resoluciones o representaciones que utilizan y a que visualicen que una misma idea matemática puede sostener distintas estrategias de resolución. También podemos pedir comparar la eficiencia de un abordaje u otros, para resolver diferentes problemas.

Estas cinco prácticas permiten ordenar el trabajo de planificación de los docentes. En primer lugar, *anticipar* las posibles resoluciones de los estudiantes ayuda a seleccionar tareas de alta demanda cognitiva potencial. En segundo término, el *monitoreo* auxilia al docente a comparar su anticipación con las producciones reales en la clase. Las prácticas de *seleccionar* y *secuenciar* ordenan la discusión durante la puesta en común. No son prácticas aisladas, sino que se interrelacionan y retroalimentan entre sí, como lo indica el modelo presentado por Stein et al. (2008).

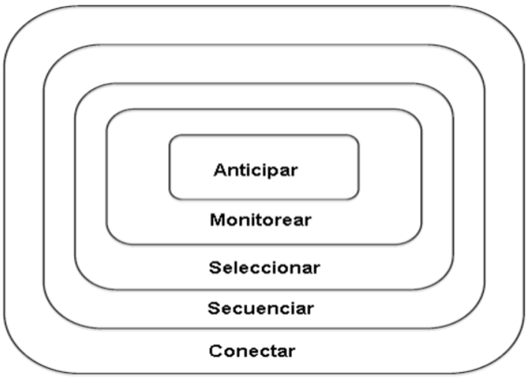


Figura 5: Diagrama esquemático de las cinco prácticas (Stein et al., 2008, p. 322)

Como lo señalan Stein et al. (2008, p. 322): “Creemos que estas prácticas, en conjunto, contribuyen a aumentar la probabilidad de que los profesores sean capaces de utilizar las respuestas de los alumnos para avanzar en la comprensión matemática de toda la clase”.

A modo de cierre

En este taller invitamos a los asistentes a reflexionar sobre las tareas que llevamos a la clase de matemática, a partir de la clasificación que ofrecen Stein et al. (2000), así como la guía que proponen para ubicar una tarea en cierta categoría. Pensamos que la consideración de la demanda cognitiva de una tarea es una herramienta muy potente, tanto para los docentes y formadores, como para los futuros docentes.

Sin embargo, como ya dijimos, una tarea puede ser potencialmente de alta demanda cognitiva y declinar en el transcurso de la clase. Un aspecto esencial para mantener la demanda cognitiva de una tarea se vincula con las normas sociales y sociomatemáticas que se establecen en la clase (Yackel y Cobb, 1996). Las primeras se vinculan con los roles que los docentes promueven que los estudiantes desempeñen. Por ejemplo, que solo escuchen y repitan, o que hagan preguntas, expliquen su pensamiento, justifiquen sus resoluciones. Las normas sociomatemáticas, en tanto, tienen que ver con negociar en la clase, por ejemplo, cuándo una solución o una justificación es matemáticamente correcta. Los dos tipos de normas implican diversos niveles de demanda cognitiva para el abordaje de las tareas en la clase.

En el taller discutimos también las cinco prácticas que presentan Stein et al. (2008) para la implementación en la clase de tareas de alta demanda cognitiva potencial. Consideramos que constituyen un instrumento muy importante para el desarrollo profesional de los docentes, ya que permiten reflexionar más profundamente sobre las tareas que proponemos, así como enfocarnos en el pensamiento que desarrollan los estudiantes.

Referencias bibliográficas

Charalambous, Ch. (2008). Mathematical Knowledge for Teaching and the unfolding of tasks in mathematics lessons: integrating two lines of research. En O. Figueras, J. Cortina, S. Alatorre, T. Rojano y A. Sepúlveda (Eds.), *Proceedings of the Joint Meeting of PME 32 and PME-NA XXX*. Vol. 2 (pp. 281 - 288). México: CINVESTAV-UMSNH

Da Costa, S., y Scorza, V. (2011). *Matemática 1*. Prácticas Santillana. Ediciones Santillana S.A.

Doyle, W. (1988). Work in mathematics classes: The context of students' thinking during instruction. *Educational Psychologist, 23* (2), 167-180.

Hiebert, J. y Wearne, D. (1993). Instructional Tasks, Classroom Discourse, and Students´ Learning in Second-Grade Arithmetic. *American Educational Research Journal, 30* (2), 393-425.

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) (2000). *Principles and Standards for School Mathematics.* Recuperado de https://www.rainierchristian.org/NCTM_principles-and-standards-for-school-mathematics.pdf

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) (2015). *De los principios a la acción. Para garantizar el éxito de todos* (D. Garmendia, Trad.). Reston: 3D Editorial.

Pagés, D. (2015). *Los profesores de matemática en formación en Uruguay: un análisis de las interacciones en la clase de su práctica docente*. (Tesis de maestría no publicada). Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del IPN, México.

Pagés, D. y Scorza, V. (2022). Las tareas de alta demanda cognitiva. Cinco prácticas para implementarlas en la clase de matemática. En C. Ochoviet y M. Olave (comps.), *Diseño de tareas y prácticas de enseñanza de la matemática: aportes desde la investigación.* Colección Didáctica de la Matemática. Editorial Contexto.

Scorza, V. (2016). *Las tareas de final abierto y su potencial para la enseñanza de la matemática en la formación de profesores* (Tesina de diploma no publicada). Consejo de Formación en Educación de la ANEP-Universidad de la República. Montevideo, Uruguay.

Stein, M. K., y Lane, S. (1996). Instructional tasks and the development of student capacity to think and reason: An analysis of the relationship between teaching and learning in a reform mathematics project. *Educational Research and Evaluation, 2* (1), 50-80.

Stein, M. K., Smith, M. S., Henningsen, M. A., y Silver, E. A. (2000). *Implementing Standards-based mathematics instruction: A casebook for professional development*. Teachers College Press.

Stein, M., Engle, R., Smith, M., y Hughes, E. (2008). Orchestrating Productive Mathematical Discussions: Five Practices for Helping Teachers Move Beyond Show and Tell. *Mathematical Thinking and Learning, 10* (4), 313 – 340.

Yackel, E. y Cobb, P. (1996). Sociomathematical norms, argumentation, and autonomy in mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education, 27*, 458-477.

Zaslavsky, O. (1995). Open-ended tasks as a trigger for mathematics teachers´ professional development. *For the Learning of Mathematics, 15* (3), 15-20.

Actividades lúdicas para el aprendizaje de operaciones con números enteros

Elena Freire Gard[1], Claudia Castillos[2], Lucas Bentancur[3]

[1] efreire@docente.ceibal.edu.uy. Instituto de Profesores Artigas. Uruguay

[2] claudia.castillos@docente.ceibal.edu.uy. Liceo Cagancha, n°30. Uruguay.

[3] lbentancur@docente.ceibal.edu.uy. Liceo técnico los Pinos. Uruguay.

Tema: Números enteros.

Modalidad: Virtual

Nivel educativo: Ciclo Básico de Educación Secundaria. Actualmente: Educación Básica Integrada (EBI)- tramo 5- ANEP

Resumen: *Esta investigación reporta los resultados obtenidos al implementar actividades lúdicas para el aprendizaje de operaciones con números enteros en grupos de 1er año de Educación Secundaria Básica. Para la enseñanza de dicho tema se crearon dos actividades lúdicas. La primera, consta de fichas manipulables para comprender la adición de enteros, inspirada en el modelo de bloques propuesto por Freudenthal (neutralización entre opuestos). Esta actividad permitió que los estudiantes infieran las reglas para sumar números enteros de forma intuitiva y luego formalizarlas. Incluso en un siguiente nivel de este mismo juego se implementó un nuevo dado para introducir la multiplicación de enteros y sus propiedades. La segunda actividad lúdica se inspiró en las cartas Magic y también en el videojuego de Plantas Vs Zombies. Ambas actividades lúdicas propiciaron que los estudiantes realicen conjeturas sobre cómo multiplicar números enteros de diferente o de igual signo y realizar operaciones combinadas. Entre las conclusiones se destaca que se identificaron tres etapas por las que transita el estudiante para lograr el proceso de abstracción que requiere operar con números enteros. El juego favoreció las relaciones interpersonales entre estudiantes, la motivación, como también el desarrollo de la capacidad argumentativa.*

Palabras claves: *operaciones con números enteros, educación secundaria básica, actividades lúdicas para la enseñanza.*

Introducción

El aprendizaje de los números negativos pasa por superar algunos obstáculos epistemológicos y cognitivos. Parada et al. (2013) identifican que una primera dificultad en su enseñanza se produce al presentar este tema en la enseñanza formal en un contexto aritmético, en contraposición al desarrollo histórico de su enseñanza que surgió como necesidad para realizar cálculos algebraicos. Particularmente, el aprendizaje de los números enteros requiere que los estudiantes posean cierta madurez cognitiva (11-12 años) y que se encuentren en un estadio del desarrollo individual que posibilite su comprensión (Filloy, 1999, citado en Hernández y Gallardo, 2006). Por otra parte, otra dificultad es la falta de aptitud de los estudiantes para manipular y dar sentido a cantidades negativas aisladas y la ausencia de un referente físico que les dé sentido (Glaeser, 1981, citado en Cid, 2000).

Algunas experiencias como las de Castillo Angulo (2014) y Castillo Banda (2019) identifican que los estudiantes experimentan mejoras en el aprendizaje de las operaciones de números enteros cuando tienen la oportunidad de experimentar con objetos manipulativos. Castillo Banda (2019) reporta su investigación en la que utiliza un juego para enseñar números enteros a estudiantes de 12 años. Ella encontró beneficios en el aprendizaje de los estudiantes al utilizar el juego para aprender a sumar números enteros. El juego que utilizó constaba de rondanas de colores, unas para números positivos y otras para números negativos y se reportaron resultados que alientan a crear juegos similares.

Objetivo

El objetivo de esta investigación es analizar las repercusiones en el aprendizaje del tema números enteros al incluir dos actividades lúdicas en grupos de 1er año de educación secundaria (12-13 años).

Propuesta de enseñanza

Los juegos que se diseñaron para aprender operaciones con números enteros se inspiraron en el videojuego: Plantas Vs Zombies. Un primer juego, está orientado al aprendizaje de la suma de números enteros y se fundamenta en la lógica de neutralización de opuestos (según la propuesta de Freudenthal, 1983). La segunda propuesta lúdica es un juego de cartas para realizar operaciones combinadas que involucra “hechizos” como por ejemplo el “convertidor” que multiplica por (-1) el puntaje de cada carta, el “multiplicador” que multiplica por (2) o por (3) los puntos de cualquier combatiente.

Primera actividad lúdica

Se confeccionaron dos formatos del juego. Un primer formato (Figura 1) consta de dos dados y veinticuatro fichas rectangulares (doce con plantas y doce con zombies).

Figura 1. Un formato del juego de plantas y zombies.
Fuente: realizado Claudia Castillos.

Respecto a los dados uno tiene números del 1 al 6 y el otro tiene tres caras con la imagen de un zombie y el signo de - superpuesto y las otras tres caras presentan la imagen de una planta con el signo de + superpuesto. Cada planta representa una unidad positiva y cada zombie una unidad negativa. En este primer formato se confeccionó con cartón un soporte para sostener a las fichas que permite levantarlas cuando haya que mostrarlas y bajarlas cuando salgan del juego.

El segundo formato de la primera actividad lúdica consta de veinticuatro fichas rectangulares, doce con la imagen de una planta con el signo de "+" y doce con la imagen de un zombie y el signo de "-" (Figura 2). En este nuevo formato no hay un soporte que sostenga a las fichas. Además de las fichas se utilizan los mismos dados mencionados en el primer formato del juego.

Figura 2. Segundo formato de la primera actividad lúdica.
Fuente: Elaborado por Lucas Bentancur

Indicaciones para la aplicación de la primera actividad lúdica

El juego se realiza en equipos de estudiantes (por ejemplo, dividir la clase en dos o en pequeños subgrupos). Un integrante de cada equipo tira los dos dados. Luego se miran sus caras superiores y se dejan a la vista las fichas que corresponden a las plantas o zombies, según el número obtenido (Figura 3). Las fichas de plantas y zombies se enfrentan y "combaten", se recuerda que fichas opuestas se anulan y cuando esto pase quedarán hacia abajo. En ese momento los estudiantes tendrán que calcular cuántas plantas o zombies sobrevivirán. Las fichas que quedan en la mesa ayudarán a identificar el resultado de la suma de números enteros.

Figura 3. Comienza la partida una planta se anula con un zombie, queda pendiente el enfrentamiento de dos plantas con otros dos zombies.
Fuente: Elaboración propia.

Un ejemplo de una jugada al tirar los dados podría ser que salga "+3" que corresponde a tres plantas y "-5" que corresponde a 5 zombies (Figura 4).

Figura 4. A la izquierda se representa el número "+3" y a la derecha se representa el número "-5".
Fuente: Elaboración de Claudia Castillos.

El estudiante deja a la vista 3 plantas y 5 zombies. Comienza el combate anulándose cada planta con un zombie. Es decir, se anulan 3 plantas con 3 zombies y quedan dos zombies sobrevivientes o sea "-2" es decir que "+3 + (-5) = -2". El registro de la operación también es parte del aprendizaje del juego, este se asocia a las deducciones que los estudiantes comenzarán a realizar sobre la suma de números negativos entre sí o de un número entero negativo y positivo según su valor absoluto.

La segunda actividad lúdica: juego de cartas con plantas y zombies

Con la intención de continuar el aprendizaje de las operaciones de números enteros se creó una segunda actividad lúdica que correspondió a un juego de cartas. Este consta de dieciséis cartas con plantas y valores desde el +1 al +6 y dieciséis cartas con zombies numeradas desde el -6 al -1. Además, hay dieciséis hechizos, 8 son hechizos de plantas y 8 son hechizos de zombies (Figura 5).

Figura 5. Juego de cartas.
Fuente: Elaboración de Claudia Castillos y Lucas Bentancur.

Además de las cartas se dispone de un dado que se ha construido especialmente para el juego. En cuatro de sus caras hay una biblioteca (dos con el número 2 y otras dos con el número 3). En las dos caras restantes del dado está la imagen de un cementerio, una con el número 3 y otra con la palabra "oponente" y el número 2 (Figura 6).

Figura 6. Imágenes del lado. Desde la izquierda: cementerio 3, cementerio 2, biblioteca 3 y cementerio 3.
Fuente: Elaborado por Claudia Castillos y Lucas Bentancur.

Para comprender el juego nos referiremos a dos términos particulares: *cementerio* y *biblioteca*. El cementerio es el mazo que se forma luego que el equipo ganador levanta de la mesa las cartas de la mano jugada (mazo de descarte). La palabra “biblioteca” hace referencia al mazo inicial de cartas de cada equipo. Si al tirar el dado sale “biblioteca 2” significa que el jugador extrae dos cartas de su biblioteca y podrá dejar en la mesa hasta dos cartas en esa jugada. Si sale la opción del dado “biblioteca 3” significa que se retiran tres cartas de la biblioteca y se podrán bajar hasta 3 cartas en esa mano. Si sale la opción “cementerio 3” deberán retirar 3 cartas del cementerio propio (en caso de no existir “cementerio” aún, no podrán retirarse cartas nuevas, pero podrán usarse tres de la mano). Finalmente, si sale la opción del dado: “cementerio oponente 2” significa que se retiran dos cartas de la parte superior del cementerio del oponente y se podrán bajar hasta dos cartas en esa mano.

Como se mencionó anteriormente, el juego de cartas dispone de hechizos, estas son cartas mágicas que pueden aplicarse sobre las cartas que están en juego en la mesa. Los hechizos son: *multiplicador* (multiplica por 2 o por 3 los puntos de una carta de la mesa), *convertido*r (multiplica por (-1) los puntos de cualquier carta, convierte una planta en zombie o viceversa) y *anulador* (multiplica por 0 el valor de cualquier carta o agrupación de ellas).

Instrucciones del juego de cartas

Se forman dos equipos (cada uno con 2 o 4 integrantes), un equipo representará a las plantas y el otro equipo a los zombies. Se barajan las cartas y se reparten a cada equipo seis cartas de su biblioteca. A partir de este momento se utilizará el dado que se ha diseñado especialmente para este juego. El primer equipo tira el dado del juego para saber cuántas cartas se extraen. A continuación, pasa a jugar el segundo equipo y se repite el procedimiento anterior. Las cartas se ponen en la mesa de a una, por turnos, un equipo por vez. Al colocar todas las cartas permitidas en la mesa comienza un combate entre plantas y zombies. Cada equipo tendrá la opción de poner en la mesa tantas cartas como indicó el dado, pero no tiene la obligación de jugar todas las cartas permitidas. Luego se realizan las operaciones matemáticas que surgen con las cartas que están en la mesa. Si el resultado final es un número entero negativo quiere decir que ha ganado el equipo de zombies y se le asignará el valor absoluto del resultado de la operación realizada. Por el contrario, si el resultado de la operación fue un número positivo el puntaje se asignará al equipo de plantas. Los puntajes obtenidos por cada equipo se registrarán en una tabla en la que se escribirán las operaciones realizadas y su resultado. El juego termina cuando se acaban las cartas de la biblioteca de uno de los equipos o luego de 4 rondas.

Para comprender mejor se muestra un ejemplo de una partida en la que en la mesa hay dos grupos de cartas que corresponden a dos términos de una operación (Figura 7). A la izquierda el primer grupo corresponde al primer término, en este las plantas juegan con un +4 y los zombies le aplican un “hechizo anulador”. En el segundo término los zombies jugaron un -3 y las plantas le aplican un “hechizo convertidor”. La operación combinada que surge de la mano sobre la mesa es “+4.(0) - 3.(-1) =”. Los jugadores tendrán que decir oralmente cuál es el resultado de la operación.

Figura 6. Una partida de cartas como ejemplo para comprender el juego.
Fuente: Elaborado por Claudia Castillos.

Metodología

Esta investigación se enmarca en un enfoque cualitativo según Kilpatrick (1988, citado en Sierra-Vázquez, 2011, p.183), involucra la investigación-acción para resolver problemas concretos que informen y se orienten a mejorar las prácticas pedagógicas del profesor.

La investigación se desarrolla en dos fases, la primera fase corresponde al análisis de clases al implementar las actividades lúdicas. La segunda fase corresponde al análisis sobre la repercusión de los juegos en los aprendizajes.

Entre las técnicas que se utilizaron para desarrollar la investigación se incluye la observación de aula y su análisis luego de la implementación. Los instrumentos utilizados para el registro fueron cámara fotográfica, filmadora y grabadora.

Implementación de las actividades lúdicas

La implementación de la primera actividad lúdica comenzó por la explicación del profesor a partir de un ejemplo. Para vincular el juego con las operaciones se dividió a la clase en subgrupos que jugaron varias partidas. Luego el profesor realizó en el pizarrón el registro de varias partidas. De ese modo los estudiantes comenzaron a observar e inferir algunas propiedades de la adición de números enteros.

En la Figura 7 se muestra una tabla que el profesor hizo en el pizarrón de la clase. En esta se indica que al tirar los dados ha salido el -4 y el +6. Teniendo en cuenta que se está utilizando el modelo de bloques de neutralización de opuestos se anula el mismo número de plantas que zombies y posteriormente se obtiene el resultado de la operación "-4 + (+6) = +2". Luego de sucesivas operaciones los estudiantes comienzan a darse cuenta de cómo operar con números enteros y de a poco empiezan a hacerlo sin necesidad de utilizar las fichas del juego.

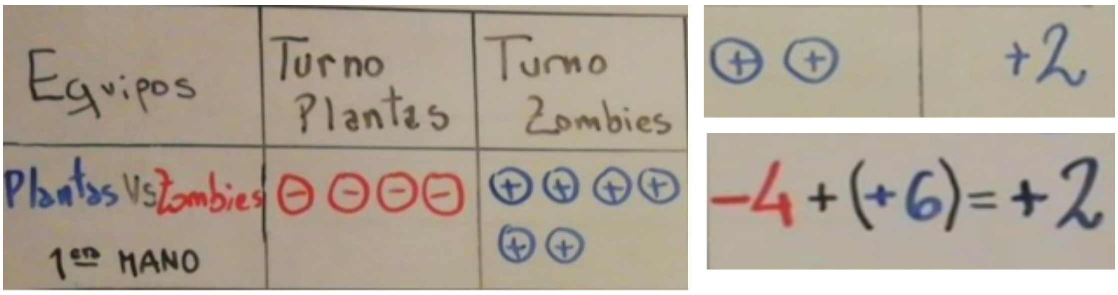


Figura 7. Ejemplo de una partida al tirar dos veces el lado.
Fuente: elaboración propia.

Resultados

A partir de la implementación del juego de dados y fichas para el aprendizaje de adición de números enteros y del análisis aposteriori, se identificaron tres etapas principales (Freire, Castillos y Bentancur, 2022) por las que transita el estudiante en el proceso de aprendizaje de dicho tema. Para que el profesor pueda identificar en qué etapa de aprendizaje se encuentra cada estudiante se confeccionaron tres indicadores que especifican cómo se maneja el estudiante cuando tiene que resolver una adición de números enteros (Figura 8).

Indicador etapa 1	Indicador etapa 2	Indicador etapa 3
El estudiante depende exclusivamente de las fichas para poder sumar números enteros. Necesita ver las fichas agrupadas en plantas y zombies.	El estudiante comienza a desprenderse poco a poco de las fichas y pasa a entender qué operación aritmética debe ejecutar para obtener el resultado de la adición de números enteros y puede justificarlo.	El estudiante deja de lado los objetos manipulativos, lo que implica un nivel de mayor abstracción para sumar números enteros. En esta etapa ya se han incorporado las reglas para sumar números enteros.

Figura 8. Indicadores elaborados para el análisis.
Fuente: Creación propia.

Consideramos que los juegos utilizados repercutieron en mejorar el aprendizaje de los estudiantes. Una evidencia de esto es la alusión que hacen a las plantas y a los zombies para identificar lo que tienen que hacer cuando suman números negativos o cuando suman números enteros de diferente signo. En estos casos los estudiantes identificaron adecuadamente las condiciones para realizar la suma. Teniendo en cuenta que esta experiencia lleva tres años de aplicación en diferentes grupos de 1er año se están implementando ajustes que optimizan el uso de los juegos.

Respecto de la segunda actividad lúdica una de las novedades que se ha agregado es la inclusión de tablas que facilitan el registro de las operaciones que surgen en la partida de cartas.

En particular la idea de las rondanas de colores (sugerida por Castillo Banda, 2019) o la de asociar a cada unidad positiva un círculo con un signo de más y a la unidad negativa de asociarle un círculo con un signo de menos también fueron recursos que facilitaron la comprensión de los estudiantes. La Figuras 9 muestra un estudiante que está completando una ficha y el registro que hace en la tabla.

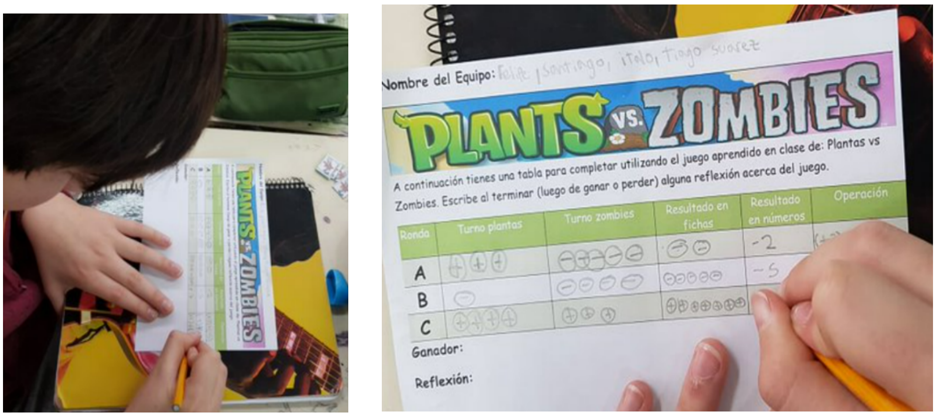


Figura 8. Ficha creada por la profesora Castillos para realizar el registro.
Fuente: elaboración propia.

Conclusiones

Las actividades lúdicas incrementaron la motivación de los estudiantes porque las mismas posibilitaron comprender la adición y sustracción de números enteros de forma divertida a través de fichas manipulables. A su vez, la inclusión de estos juegos posibilitó que estudiantes no participativos logren involucrarse y realizar valiosos aportes en clase. Este hecho deja en evidencia el carácter potenciador de los juegos para aprender matemática.

La inclusión de los juegos permitió que los estudiantes desarrollen la cooperación entre ellos y el compañerismo al explicar su lógica y a la vez, al ayudar a comprender los resultados obtenidos. Asimismo, propició que los propios estudiantes pudieran realizar deducciones relacionadas a los contenidos mencionados. El primer juego permitió inferir las reglas para sumar números enteros. Con la implementación del segundo juego de cartas se reafirmaron los conocimientos adquiridos y a la vez llevó a que los estudiantes pudieran hacer conjeturas sobre cómo multiplicar números enteros de diferente o de igual signo. Estas deducciones fueron socializadas y luego se institucionalizaron en la clase. A su vez, el juego de cartas permitió reafirmar la resolución correcta de las operaciones combinadas.

Divulgación del juego

Las actividades lúdicas presentadas han tenido un efecto positivo en el aprendizaje de los estudiantes. Por dicho motivo se han divulgado en congresos y también en talleres. Por ejemplo, en febrero de 2022 en el Instituto Profesores Artigas (IPA) se llevó a cabo un taller de verano (Figura 9) para divulgar entre profesores y estudiantes de profesorado los juegos de fichas y cartas. Se considera que es fundamental divulgar en la comunidad matemática de profesores este tipo de actividades que tienen un gran potencial para la enseñanza de las operaciones con números enteros.


Figura 9. Divulgación del juego plantas y zombies.
Fuente: Elaboración propia.

Referencias bibliográficas

Castillo Banda, N. Y. (2019). *Propuesta de un modelo didáctico para la enseñanza-aprendizaje de la aritmética de números enteros en la educación primaria*. Disponible en: http://repositorio.unjfsc.edu.pe/handle/UNJFSC/3835

Castillo Angulo, C. (2014). Aprendizaje de adición y sustracción de números enteros a través de objetos físicos. *Maestría en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales*. Disponible en: http://repositorio.autonoma.edu.co/jspui/handle/11182/883

Cid, E. (2000). Obstáculos epistemológicos en la enseñanza de los números negativos. *Actas de las XV Jornadas del Seminario Interuniversitario de Investigación en Didáctica de las Matemáticas*, Boletín del SI-IDM, 10

Freire, E., Castillos, C. & Bentancur, L. (2022). Experiencias con actividades lúdicas para el aprendizaje de operaciones con números enteros. *Revista Unión n° 64*, abril 2022, 184-200. https://union.fespm.es/index.php/UNION/issue/view/73/N%C3%BAmero%20completo%2064

Freudenthal, Hans. (1983). Didactical Phenomenology of Mathematical Structures. Dordrecht: Reidel.

Hernández, A., & Gallardo, A. (2006). *La extensión del dominio numérico de los naturales a los enteros vía el modelo concreto de bloques.* Educación Matemática, 18(1), 73-97. Disponible en: http://funes.uniandes.edu.co/13115/

Parada, E., Pluvinage, F. y Sacristán, A. (2013). Reflexiones en una comunidad de práctica de educadores matemáticos sobre los números negativos. *Recherches en didactique des mathématiques*, *33*(3), 233-266. Disponible en: https://cutt.ly/YjcyXuL

Sierra Vázquez, M. (2011). Investigación en Educación Matemática: objetivos, cambios, criterios, método y difusión. En *Educatio Siglo XXI*, *29*(2), 173-198.

Gráficos estadísticos en libros de texto de educación primaria en chile: tipos y niveles de lectura

J. Ignacio Villa-Esparza[1], Danilo Díaz-Levicoy[2], Audy Salcedo[3]

[1] ignaciov19@outlook.com. Universidad Católica del Maule. Chile.

[2] dddiaz01@hotmail.com. Universidad Católica del Maule. Chile.

[3] audy.salcedo@gmx.com. Universidad Católica del Maule. Chile.

Tema: Pensamiento probabilístico-estadístico

Modalidad: Comunicaciones

Nivel educativo: Primaria

Resumen: Esta investigación tiene por objetivo analizar las actividades sobre gráficos estadísticos en libros de texto Educación Primaria en Chile. Por ello, se sigue una metodología cualitativa, sustentada en el paradigma interpretativo, mediante el estudio de casos y se utiliza como método el análisis de contenido. Para dicho análisis se consideran las unidades de análisis de tipos de gráficos y niveles de lectura en libros de texto de 1° a 6° de Educación Primaria. Los resultados, muestran el predominio de los gráficos de barras y el nivel 2 de lectura (leer dentro de los datos).

Palabras clave: *Gráficos estadísticos, Libros de texto, Educación Primaria.*

Introducción

La modernización y los avances tecnológicos han abierto las puertas para acceder de forma más fácil y rápida a información de distinto tipo, ya sea a través de la televisión, redes sociales, entre otras. Un gran número de esta información es de tipo estadística (Díaz-Levicoy et al., 2015), la cual es presentada por medio de diferentes tablas y gráficas estadísticas, considerándose a estas últimas un medio más atractivo (Arteaga et al., 2016). Por consiguiente, la sociedad actual requiere de los ciudadanos competencias como identificar, comprender, interpretar y evaluar este tipo de información sintetizada mediante gráficos estadísticos, los cuales son parte de la cultura estadística. Del Pino y Estrella (2012) entienden la cultura estadística como la capacidad para interpretar tablas y gráficos estadísticos presentes en los medios de comunicación, evaluando críticamente la información presente en ellas, con el fin de tomar decisiones más informadas, valorando la importancia de la estadística en nuestro diario vivir.

Por otro lado, el currículo chileno, siguiendo tendencias internacionales, incluye la enseñanza de la estadística en general y de los gráficos estadísticos en particular, desde los primeros niveles educativos en el eje temático de Datos y probabilidades (MINEDUC, 2012).

La inclusión de estos temas ha influido en distintos ámbitos educativos como son la formación y especialización de profesores, recursos didácticos y libros de texto. Estos últimos, son uno de los recursos fundamentales para el trabajo del eje de Datos y probabilidades, siendo considerado por muchos la concreción del currículo y, en ocasiones, es el único material de apoyo con el que los profesores cuentan para la preparación de sus clases, permitiendo o no, el éxito de la enseñanza (Pallauta et al., 2021). Por razones como las anteriores es que los libros de texto son considerados fundamentales para los procesos de enseñanza y aprendizaje.

El este sentido, tener mayor información con respecto a los gráficos estadísticos presentes en los libros de texto, podría influir en la selección de las tareas a trabajar y los aprendizajes de los estudiantes (Pallauta et al., 2021). De acuerdo con lo anterior, el objetivo de este trabajo es analizar las actividades sobre gráficos estadísticos en libros de texto de Educación Primaria en Chile.

Antecedentes

Los gráficos estadísticos presentes en los libros de texto se han vuelto un tema de interés por diferentes investigadores en Didáctica de la Estadística. Una de las primeras investigaciones en castellano, es hecha por Arteaga et al. (2013) al indagar por los tipos de gráficos y tareas solicitadas en los libros de texto de Educación Primaria en España.

Más tarde, Díaz-Levicoy et al. (2016) comparan los gráficos estadísticos presentes en libros de textos españoles y chilenos (18 textos de cada país). Los resultados obtenidos indican una mayor presencia del gráfico de barras y el nivel de lectura leer dentro de los datos. Hallazgos similares son los obtenidos por Vidal-Henry et al. (2020) cuando analizan 12 libros de texto de primaria de México.

Además, se encontraron estudios en Chile (Díaz-Levicoy et al., 2015), Perú (Díaz-Levicoy et al., 2018), Argentina (Díaz-Levicoy et al., 2017), Venezuela (Salcedo, 2016), México (Vidal-Henry et al., 2020), Costa Rica (Jiménez-Castro et al., 2020) y Brasil (Díaz-Levicoy y Alencar, 2020). Entre los resultados de estos trabajos se destaca el predominio de los gráficos de barras y del nivel de lectura 2 (leer dentro de los datos) (Arteaga et al., 2013; Díaz-Levicoy et al., 2015).

Marco teórico

Gráficos estadísticos en el currículo de Educación Primaria chilena

Para Pinkasz y Tiramonti (2006) el currículo es el "resultado de un proceso de selección cultural que establece, para una sociedad en un momento determinado, qué es lo deseable que las nuevas generaciones aprendan" (p. 68).

Ante los requerimientos de la sociedad actual, particularmente el currículo de matemática de Educación Primaria de Chile que comprende ocho cursos actualmente, se organiza mediante cinco ejes temáticos, los cuales son: números y operaciones; patrones y álgebra; geometría; medición; datos y probabilidades. Este último eje, el cual es objeto de estudio en esta investigación, tiene como fin que los estudiantes:

> Registren, clasifiquen y lean información dispuesta en tablas y gráficos, y que se inicien en temas relacionados con las probabilidades. Estos conocimientos les permitirán reconocer gráficos y tablas en su vida cotidiana. Para lograr este aprendizaje, es necesario que conozcan y apliquen encuestas y cuestionarios por medio de la formulación de preguntas relevantes, basadas en sus experiencias e intereses, y después registren lo obtenido y hagan predicciones a partir de ellos. (MINEDUC, 2018, p. 219).

Las habilidades mencionadas buscan estar a la vanguardia con las modificaciones curriculares realizadas en diversos países, incluyendo el trabajo de contenidos de Estadística y Probabilidad desde los primeros años educativos, procurando que los estudiantes al término de su educación formal sean capaces de leer, comprender y evaluar información estadística.

En lo que respecta al eje de Datos y probabilidades (1° a 6° de primaria), en la Tabla 1 se especifican los objetivos de aprendizaje propuestos en las bases curriculares para abordar estos temas (MINEDUC, 2018).

Cursos	Objetivos
Primero	• Recolectar y registrar datos para responder preguntas estadísticas sobre sí mismo y el entorno, usando bloques, tablas de conteo y pictogramas. • Construir, leer e interpretar pictogramas (p. 228).
Segundo	• Recolectar y registrar datos para responder preguntas estadísticas sobre juegos con monedas y dados, usando bloques y tablas de conteo y pictogramas. • Registrar en tablas y gráficos de barra simple, resultados de juegos aleatorios con dados y monedas. • Construir, leer e interpretar pictogramas con escala y gráficos de barra simple (p. 232).
Tercero	• Realizar encuestas, clasificar y organizar los datos obtenidos en tablas y visualizarlos en gráficos de barra. • Construir, leer e interpretar pictogramas y gráficos de barra simple con escala, de acuerdo a información recolectada o dada. Representar datos usando diagramas de puntos (p. 237).
Cuarto	• Realizar encuestas, analizar los datos y comparar con los resultados de muestras aleatorias, usando tablas y gráficos. • Realizar experimentos aleatorios lúdicos y cotidianos, y tabular y representar mediante gráficos de manera manual y/o con software educativo. • Leer e interpretar pictogramas y gráficos de barra simple con escala y comunicar sus conclusiones (p. 244).
Quinto	• Leer, interpretar y completar tablas, gráficos de barra simple y gráficos de línea y comunicar sus conclusiones. • Utilizar diagramas de tallo y hojas para representar datos provenientes de muestras aleatorias (p. 249).
Sexto	• Comparar distribuciones de dos grupos, provenientes de muestras aleatorias, usando diagramas de puntos y de tallo y hojas. • Leer e interpretar gráficos de barra doble y circulares y comunicar sus conclusiones (p. 254).

Tabla 1. Objetivos de aprendizaje sobre gráficos estadísticos en Educación Primaria del currículo chileno

Niveles de lectura

Una taxonomía para analizar la dificultad de las actividades de lectura en torno a los gráficos estadísticos es la propuesta por Curcio et al. (Curcio, 1989; Friel et al., 2001) y Shaughnessy et al. (1996), quienes identifican los siguientes niveles:

Leer los datos (nivel 1): Corresponde a la lectura explícita de la información del gráfico.

Leer dentro de los datos (nivel 2): Conlleva a la obtención de información no presente de forma literal, por lo que se obtiene mediante cálculos simples.

Leer más allá de los datos (nivel 3): En este nivel la información no se encuentra de forma explícita ni se obtiene por medio de algún cálculo matemático, el estudiante requiere hacer inferencias y razonar acerca de la información presentada.

Leer detrás de los datos (nivel 4): Corresponde a la valoración crítica del gráfico, la información representada o las conclusiones derivadas.

Metodología

Esta investigación es de tipo cualitativa, sustentada en el paradigma interpretativo, mediante el estudio de casos y el método de análisis de contenido. Para este análisis se han considerado 6 libros de texto de la Editorial Gakko Tosho que llevan por nombre Sumo Primero, los que son proporcionados por el MINEDUC de 1° a 6° de Educación Primaria, que se entregan a los centros educativos municipales y particulares subvencionados (financiados por el Estado y los padres) del país. El detalle de los libros de texto seleccionados se muestra a continuación:

Texto	Autores (año)	Título	Editorial
T1	Isoda (2021a)	Sumo Primero 1° básico. Texto del estudiante. Tomo 1.	Gakko Tosho Co
T2	Isoda (2021b)	Sumo Primero 2° básico. Texto del estudiante. Tomo 2.	Gakko Tosho Co
T3	Isoda (2021c)	Sumo Primero 3° básico. Texto del estudiante. Tomo 2.	Gakko Tosho Co
T4	Isoda (2021d)	Sumo Primero 4° básico. Texto del estudiante. Tomo 2.	Gakko Tosho Co
T5	Isoda (2021e)	Sumo Primero 5° básico. Texto del estudiante. Tomo 2.	Gakko Tosho Co
T6	Isoda (2021f)	Sumo Primero 6° básico. Texto del estudiante. Tomo 2.	Gakko Tosho Co

Tabla 2. Libros de texto utilizados

Las unidades de análisis corresponden a los tipos de gráficos estadísticos y los niveles de lectura (Curcio, 1989; Friel et al., 2001; Shaughnessy et al., 1996) que intervienen en las actividades sobre estas representaciones presenten en los libros de texto. Estos últimos se ejemplifican en el apartado de resultados.

Resultados

Tipos de gráficos

En primer lugar, en esta investigación se analizaron los tipos de gráficos presentes en los libros de texto. En la Tabla 3 se observa los resultados obtenidos al analizar los textos escolares de primero a sexto de primaria.

Con respecto a esta unidad de análisis se observó el predominio de los gráficos de barras (47,8%), los cuales aparecen desde tercero a sexto de primaria. En segundo lugar, están los pictogramas (16,4%), presentes en los cuatro primeros cursos, seguidos por los gráficos de líneas (13,4%), los que se encontraron en los textos de quinto y sexto curso. Finalmente, los gráficos estadísticos menos frecuentes son los gráficos de puntos (9%), tallos y hojas (7,4%) y circulares (6%). La presencia de estos gráficos estadísticos están en concordancia con los establecidos por el MINEDUC, con excepción de la ausencia del gráfico de barras en el segundo curso.

Tipo de gráfico	1°	2°	3°	4°	5°	6°	Total
Pictograma	1(100)	2(100)	5(29,4)	3(25)	0(0)	0(0)	11(16,4)
Barras	0(0)	0(0)	9(53)	9(75)	6(35,3)	8(44,4)	32(47,8)
Puntos	0(0)	0(0)	3(17,6)	0(0)	0(0)	3(16,7)	6(9)
Líneas	0(0)	0(0)	0(0)	0(0)	8(47,1)	1(5,6)	9(13,4)
Tallo y hojas	0(0)	0(0)	0(0)	0(0)	3(17,6)	2(11,1)	5(7,4)
Circular	0(0)	0(0)	0(0)	0(0)	0(0)	4(22,2)	4(6)
Total	1(100)	2(100)	17(100)	12(100)	17(100)	18 (100)	67(100)

Tabla 3. Frecuencia (porcentajes) de los tipos de gráficos estadísticos en los libros de texto: Sumo primero

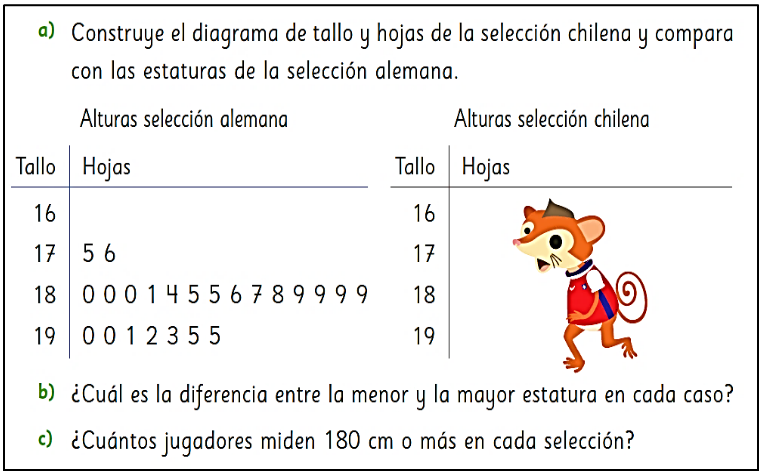
Niveles de lectura

La segunda unidad de análisis correspondió al nivel de lectura requerido para dar respuesta a las actividades que se sugieren en los libros de texto. Los resultados obtenidos indican la presencia de los cuatro niveles de lectura.

Nivel lectura 1 (leer los datos). En la Figura 1 se puede observar un ejemplo de este nivel, el cual está referido a la popularidad de distintos platos de comida, siendo los resultados presentados por medio de un pictograma. El estudiante para dar respuesta a las preguntas planteadas deberá considerar los elementos que componen el gráfico, para luego hacer una lectura literal de la información lo que permitirá llegar a la respuesta.

Figura 1. Ejemplo de nivel 1 de lectura (T1, p.89)

Nivel de lectura 2 (leer dentro de los datos). A través de un diagrama de tallo y hojas, en la Figura 2, se ejemplifica este nivel de lectura, el cual se refiere a la altura de los jugadores de las selecciones de futbol de dos países. El estudiante en primer lugar deberá hacer una lectura de la información explícita que presenta el gráfico y completarlo. Luego, deberá hacer uso de dos operaciones aritmética, las cuales son adición y sustracción, esto le permitirá responder a las preguntas b y c, encontrándonos aquí en el nivel 2 de lectura.



a) Construye el diagrama de tallo y hojas de la selección chilena y compara con las estaturas de la selección alemana.

Alturas selección alemana

Tallo	Hojas
16	
17	5 6
18	0 0 0 1 4 5 5 6 7 8 9 9 9 9
19	0 0 1 2 3 5 5

Alturas selección chilena

Tallo	Hojas
16	
17	
18	
19	

b) ¿Cuál es la diferencia entre la menor y la mayor estatura en cada caso?

c) ¿Cuántos jugadores miden 180 cm o más en cada selección?

Figura 2. Ejemplo de nivel 2 de lectura (T6, p.62)

Nivel de lectura 3 (leer más allá de los datos). Un ejemplo de este nivel se puede observar en la Figura 3, la que representa los lanzamientos de una moneda de tres participantes por medio de pictogramas.

El estudiante primero deberá completar los pictogramas, para luego responder a las preguntas a y b, haciendo un conteo simple para llegar a la respuesta. Luego, en la pregunta c se solicita información que no puede obtener mediante una lectura literal o alguna operación aritmética, por lo que este deberá realizar una inferencia sobre el grado de posibilidad que tiene de ocurrir un suceso, llegando de esta forma al nivel 3 de lectura.

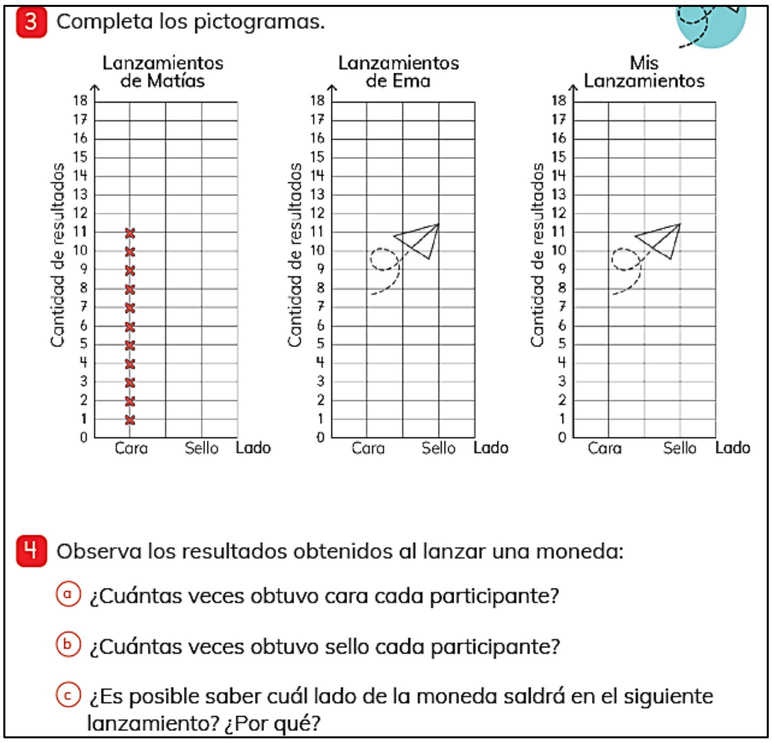
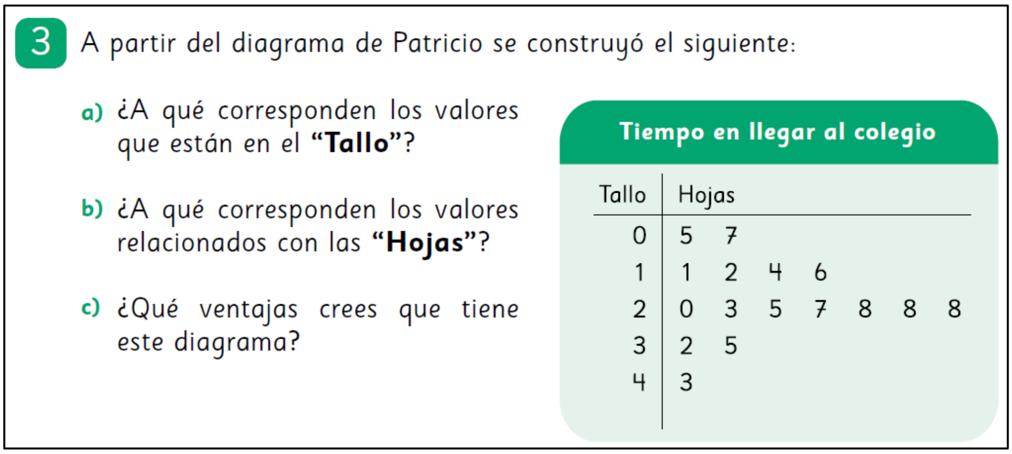


Figura 3. Ejemplo de nivel 3 de lectura (T3, p.47)

Nivel de lectura 4 (leer detrás de los datos). Finalmente, en la Figura 4 se ejemplifica el último nivel, que muestra los tiempos en llegar al colegio de un estudiante, por medio de un diagrama de tallo y hojas.

En esta actividad al niño se le solicita primero hacer una lectura literal de la información y responder dos preguntas de conocimiento sobre la estructura del gráfico (preguntas a y b). Además de lo anterior, se le solicita evaluar y valorar las ventajas que tiene el tipo de gráfico utilizado (pregunta c), llegando de esta forma el estudiante al nivel más alto de lectura según Friel et al. (2001) y Shaughnessy et al. (1996).



3 A partir del diagrama de Patricio se construyó el siguiente:

a) ¿A qué corresponden los valores que están en el **"Tallo"**?

b) ¿A qué corresponden los valores relacionados con las **"Hojas"**?

c) ¿Qué ventajas crees que tiene este diagrama?

Tiempo en llegar al colegio

Tallo	Hojas
0	5 7
1	1 2 4 6
2	0 3 5 7 8 8 8
3	2 5
4	3

Figura 4. Ejemplo de nivel 4 de lectura (T5, p.125)

En la Tabla 4 se presenta el resumen de los niveles asociados a las actividades propuestas en los libros de texto. Se puede observar que el nivel más frecuente correspondió al nivel 2 (leer dentro de los datos) (62%) estando presente desde el segundo al sexto curso, observándose de esta forma que la mayoría de las actividades requieren cálculos simples y comparaciones. Luego, le sigue el nivel 4 (leer detrás de los datos) con un 22,2% el cual se identifica en los últimos tres cursos, requiriendo de los estudiantes una valoración y reflexión de la información presentada. Por último, los niveles menos frecuentes son el nivel 1 (leer los datos) (9,5%) presente en casi todos los cursos a excepción del segundo y sexto curso y 3 (leer más allá de los datos) (6,3%), el cual solo se encuentra desde el segundo al cuarto curso.

Nivel lectura	1°	2°	3°	4°	5°	6°	Total
1	1(100)	0(0)	2(15,4)	2(15,4)	1(5,9)	0(0)	6(9,5)
2	0(0)	1(50)	10(76,9)	7(56,5)	9(53)	12(70,6)	39(62)
3	0(0)	1(50)	1(7,7)	2(15,4)	0(0)	0(0)	4(6,3)
4	0(0)	0(0)	0(0)	2(15,4)	7(41,1)	5(29,4)	14(22,2)
Total	1(100)	2(100)	13(100)	13(100)	17(100)	17(100)	63(100)

Tabla 4. Niveles de lectura de las actividades con gráficos estadísticos presentes en libros de texto: Sumo primero

Conclusiones

Esta investigación permite vislumbrar el tratamiento que se les da a los gráficos estadísticos en los libros de texto, considerando que estos son entregados por el Estado de Chile a un gran número de estudiantes.

En primer lugar, se puede concluir que el gráfico estadístico más frecuente correspondió al gráfico de barras. Por otra parte, se observó que en los dos primeros cursos solo se trabaja con el pictograma, estando ausentes los gráficos de barras en segundo curso como solicita el currículo (MINEDUC, 2012), lo que implicaría que el docente deba recurrir a otro material o crearlo para subsanar este vacío que se observó en segundo de primaria.

En cuanto a los niveles de lectura, el más recurrente correspondió al nivel de lectura 2 (leer dentro de los datos), por lo que el estudiante principalmente en una primera instancia deberá hacer una lectura literal de los datos, para luego utilizar alguna operación aritmética. Es importante destacar de los textos analizados, que en segundo lugar se encuentra el nivel de lectura 4 (leer detrás de los datos), lo que es positivo para comenzar a desarrollar la formación estadística de los estudiantes, ya que les permitirán a estos evaluar, valorar y reflexionar a partir de la información representada a través de gráfico estadístico.

Al comparar los resultados obtenidos, con estudios previos, nuestra investigación coincide en el predominio de los gráficos de barras y el nivel de lectura 2 (Arteaga et al., 2013; Díaz-Levicoy et al., 2015; Vidal-Henry et al., 2020).

Para concluir, consideramos que en este estudio entregamos información útil a los profesores, los que podrían elegir las actividades más apropiadas al nivel de exigencia que quieran trabajar con los estudiantes.

Referencias bibliográficas

Arteaga, P., Batanero, C., Contreras, J.M. y Cañadas, G.R. (2016). Evaluación de errores en la construcción de gráficos estadísticos elementales por futuros profesores. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 19*(1), 15-40.

Arteaga, P., Ortiz, J.J. y Batanero, C. (2013). Un estudio de la presentación de los gráficos estadísticos en libros de texto españoles de educación primaria. En R. Flores (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 26* (pp. 41-59). CLAME A.C.

Curcio, F. (1989). *Developing graph comprehension*. NCTM.

Del Pino, G. y Estrella, S. (2012). Educación estadística: relaciones con la matemática. *Pensamiento Educativo. Revista de Investigación Latinoamericana, 49*(1), 53-64.

Díaz-Levicoy, D. y Alencar, E.S. (2020). Gráficos Estadísticos en libros de texto: un Estudio Comparativo en el primer curso de Educación Primaria en Brasil y Chile. *JIEEM, 13*(2), 112-119. https://doi.org/10.17921/2176-5634.2020v13n2p112-119

Díaz-Levicoy, D., Batanero, C., Arteaga, P. y Gea, M. (2016). Gráficos estadísticos en libros de texto de Educación Primaria: un estudio comparativo entre España y Chile. *Boletim de Educação Matemática, 30*(55), 713-737. http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v30n55a20

Díaz-Levicoy, D., Batanero, C., Arteaga, P. y López-Martín, M.M. (2015). Análisis de los gráficos estadísticos presentados en libros de texto de Educación Primaria chilena. *Educação Matemática Pesquisa, 17*(4), 715-739.

Díaz-Levicoy, D., Giacomone, B. y Arteaga, P. (2017). Caracterización de los gráficos estadísticos en libros de texto argentinos del segundo ciclo de Educación Primaria. *Profesorado, Revista de Currículum y Formación del Profesorado, 21*(3), 299-326.

Díaz-Levicoy, D., Osorio, M., Arteaga, P. y Rodríguez-Alveal, F. (2018). Gráficos estadísticos en libros de texto de matemática de Educación Primaria en Perú. *Boletim de Educação Matemática, 32*(61), 503-525. https://doi.org/10.1590/1980-4415v32n61a10

Friel, S. N., Curcio, F. R. y Bright, G. W. (2001). Making sense of graphs: critical factors influencing comprehension and instructional implications. *Journal for Research in Mathematics Education, 32*(2), 1-50.

Jiménez-Castro, M., Arteaga, P. y Batanero, C. (2020). Los gráficos estadísticos en los libros de texto de Educación Primaria en Costa Rica. *Boletim de Educação Matemática, 34*(66), 132-156. https://doi.org/10.1590/1980-4415v34n66a0

Isoda, M. (2021a). *Sumo Primero 1° básico. Texto del estudiante. Tomo 1*. Gakko Tosho Co.

Isoda, M. (2021b). *Sumo Primero 2° básico. Texto del estudiante. Tomo 2*. Gakko Tosho Co.

Isoda, M. (2021c). *Sumo Primero 3° básico. Texto del estudiante. Tomo 2*. Gakko Tosho Co.

Isoda, M. (2021d). *Sumo Primero 4° básico. Texto del estudiante. Tomo 2*. Gakko Tosho Co.

Isoda, M. (2021e). *Sumo Primero 5° básico. Texto del estudiante. Tomo 2*. Gakko Tosho Co.

Isoda, M. (2021f). *Sumo Primero 6° básico. Texto del estudiante. Tomo 2*. Gakko Tosho Co.

MINEDUC. (2012). Bases *Curriculares Primero a Sexto Básico*. Unidad de Currículum y Evaluación.

MINEDUC. (2018). *Bases Curriculares Primero a Sexto Básico*. Unidad de Currículum y Evaluación.

Pallauta, J.D., Gea, M.M. y Arteaga, P. (2021). Caracterización de las tareas propuestas sobre tablas estadísticas en libros de texto chilenos de Educación Básica. *Paradigma, 43*(1), 32-60.

Pinkasz, D. y Tiramonti, G. (2006). Las oportunidades educativas de las mujeres en la modernización de los 90 en Argentina. En P. Provoste (Ed.), *Equidad de género y reformas educativas. Argentina, Chile, Colombia y Perú* (pp. 51-97). Hexagrama Consultoras, FLACSO, IESCO.

Salcedo, A. (2016). Gráficos estadísticos en libros de texto para Educación Primaria de Guatemala y Venezuela. *Educação Matemática Pesquisa, 18*(3), 1141-1163.

Shaughnessy, J. M., Garfield, J. y Greer, B. (1996). Data handling. En A. J. Bishop, K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick y C. Laborde (Eds.), *International Handbook of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 205-237). Springer Publishing.

Vidal-Henry, S., Díaz-Levicoy, D., Navarro, C. y García-García, J. (2020). Gráficos estadísticos en libros de texto de matemáticas para la Educación Primaria mexicana. *Educação e Fronteiras On-Line, 10*(29), 153-170. https://doi.org/10.30612/eduf.v10i29.14177

Estudio del Conocimiento Matemático para la Enseñanza de aspectos clave de la Geometría Fractal

Victoria Artigue [1], Margot Madama [2], María de los Ángeles Fanaro [3], Eduardo Lacués [4]

[1] maria.artigue@ucu.edu.uy. Universidad Católica del Uruguay.

Dirección General de Educación Secundaria. Uruguay.

[2] margot.madama@gmail.com. Dirección General de Educación Secundaria. Uruguay.

[3] mariangelesfanaro@gmail.com. CONICET-NEES. Facultad de Ciencias Humanas. UNCPBA. Argentina.

[4] elacues@gmail.com. https://orcid.org/0000-0001-7449-999X

Tema: Enseñanza de la Geometría Fractal, Conocimiento Especializado del profesor de Matemática

Modalidad: Comunicación Breve

Nivel educativo: Enseñanza media

Resumen: *En este trabajo se presenta el análisis de una propuesta de enseñanza y aprendizaje sobre Geometría Fractal que fue implementada con profesores de Matemática en ejercicio de Uruguay. Se implementó en un curso diseñado y tutorado por Profesores Articuladores Departamentales de Matemática de Uruguay y expertos en didáctica. El objetivo general del curso fue contribuir a la formación continua de los profesores en ejercicio, y en especial en Geometría Fractal, ya que la mayoría de los participantes expresaron haber tenido poco o nulo contacto con la temática. Se presenta la construcción de la categorización que emergió de las producciones de los participantes, caracterizando el contenido didáctico de la propuesta y del contenido especializado de la Geometría Fractal, y algunos ejemplos de cada subcategoría.*

Palabras claves: *Geometría Fractal, Conocimiento Matemático para la Enseñanza, Profesores de Enseñanza Media.*

El problema de investigación

La enseñanza de la Geometría Fractal (GF) constituye una problemática relevante que aún no ha sido ampliamente abordada en la Educación Matemática ni en los currículos (Chen, Herron, Ding y Mohn, 2018; Karakus, 2013). Pocas veces integra los contenidos de los planes de formación docente, por lo que los profesores pueden no tener conocimiento de esta temática, su epistemología y sus fundamentos matemáticos (Chen et al., 2018). Naturalmente, entonces, desconocen cómo trabajar en su transposición didáctica (Chevallard, 1999). Por lo tanto, consideramos de gran importancia comenzar con indagar el conocimiento que los profesores tienen de la GF, y contribuir a desarrollarlo, esto es, favorecer a expandir su conocimiento especializado del contenido GF, mediante la propuesta de un conjunto de actividades desarrolladas especialmente para esto.

Marco Teórico

Fundamentos teóricos para el análisis del Conocimiento para la enseñanza de la Geometría Fractal

Son diversas las variables que el profesor pone en juego cuando lleva a cabo un proceso de enseñanza, siendo una de las principales su habilidad para fomentar el desarrollo de la adquisición de conocimiento de sus alumnos. Desde las investigaciones acerca de la formación de profesores se han propuesto diversos modelos teóricos, que describen los diferentes tipos de conocimientos que es deseable que los docentes dispongan para favorecer el aprendizaje de los estudiantes. Algunas investigaciones indican que cuanto mayor es el conocimiento del profesor sobre la disciplina a enseñar, mejor podría llegar a ser el rendimiento de los aprendices (Hill, Blunk, Charambous, Lewis, Phelps, Sleep y Ball, 2008). Sin embargo, existen múltiples tipos de conocimiento que un profesor pone en práctica a la hora de planificar, desarrollar y reflexionar sobre su trabajo en el aula (Carrillo, Montes, Contreras y Climent, 2017).

Estos modelos suelen considerar que el conocimiento de la disciplina que se enseña, si bien es necesario, no es suficiente para asegurar que el docente lleve a cabo una rica enseñanza. De esta manera, es deseable que el docente cuente con otros tipos de conocimiento, algunos de carácter cognitivo (como saber cómo aprenden los estudiantes, cuáles son sus afectos, cuáles sus dificultades y sus errores), y otros de carácter didáctico (como organizar la enseñanza, diseñar tareas, utilizar recursos adecuados).

La relación entre el conocimiento, particularmente en Matemática, y la manera de enseñarla, sigue siendo un tema de debate actual por investigadores en didáctica (Hill, et. al., 2008). Se eligió para este trabajo el marco teórico del Conocimiento Matemático para la Enseñanza (CME) (Ball, Thames y Phelps, 2008; Hill, Rowan y Ball, 2005). Esto significa aceptar que los conocimientos que ponen en juego los profesores combinan dos grandes áreas: el Conocimiento del Contenido Disciplinar y el Conocimiento Didáctico del Contenido. La primera incluye el Conocimiento Común del Contenido, Conocimiento Especializado del Contenido y Conocimiento en el Horizonte Matemático. La segunda incluye el Conocimiento del Contenido con relación a los estudiantes, a la enseñanza y al currículo.

La definición del término conocimiento aportada por Schoenfeld (2010) introduce elementos que permiten ser identificados en los profesores al resolver una situación matemática: "Yo defino el conocimiento de un individuo como la información que tiene disponible para usar para resolver problemas, alcanzar metas, o desarrollar cualquier tarea. ¡Nótese que, de acuerdo con esta definición, el conocimiento no ha de ser necesariamente correcto!"[4] (Schoenfeld, 2010, p.25). Esta manera de caracterizar al conocimiento implica tener presente tres elementos que son pertinentes para la elaboración de este trabajo, debido a su relación con el conocimiento común (o de base) y el conocimiento especializado que poseen los profesores respecto a la GF. Estos elementos son:

-*Información disponible*. Está conformada por las acciones y maneras de comprender conceptos matemáticos de tipo relacional, instrumental, lógico o simbólico, que sean adaptables a diversas situaciones.

-*Para usar*. Implica la capacidad de ignorar la información que no tenga utilidad para resolver una situación matemática. Esto puede requerir desechar definiciones informales desde una perspectiva matemática, o en el otro extremo, demasiado formales para el nivel en que se quiera enseñar. Ambas situaciones están muy presentes en la literatura consultada sobre enseñanza de la GF, lo cual motivó a estudiar la transposición didáctica de los conceptos claves de esta geometría.

-*No necesariamente correcto*. Esta aseveración es crucial para el investigador que busca identificar y comprender el conocimiento que tiene un profesor de Matemática respecto a una determinada área. En estos términos, no es relevante si el conocimiento es correcto o no, se pretende saber qué conoce el profesor para comprender su accionar (Carrillo, Contreras, Climent, Escudero, Flores y Montes, 2014).

En este trabajo se adoptará esta definición de conocimiento como referente para el análisis de las producciones de los profesores. Esta decisión se debe a su compatibilidad con el modelo teórico del Conocimiento Especializado para la Enseñanza de la Matemática[5] (Carrillo, et al., 2014), al abarcar todo aquello que se conoce superficialmente sobre la GF, pero también al conocimiento matemático adquirido durante el transcurso de la propuesta de enseñanza.

[4] Traducción realizada por los autores de este trabajo.
[5] MTSK por sus siglas en inglés: Mathematics Teacher´s Specialised Knowledge.

El curso para profesores de Matemática: características e implementación

El curso titulado "Geometría Fractal: análisis didáctico de propuestas de enseñanza" se desarrolló en 2021, en tres ediciones con una duración de 6 semanas cada uno. Fue diseñado e implementado por dos Profesores Articuladores Departamentales (PAD) de Matemática de la Dirección General de Educación Secundaria (DGES), uno de la ciudad de Canelones y otro de la ciudad de Montevideo, y por dos expertos en Didáctica de la Matemática, uno de Uruguay y otro de Argentina. La inscripción fue totalmente voluntaria, y se invitó a participar a todo profesor de Matemática de Uruguay que tuviera al menos un curso a su cargo en la DGES.

La propuesta fue construida considerando principios didácticos-pedagógicos para sustentarla, que se tradujeron en materiales de trabajo entre los que se cuentan:

1. una introducción hacia la GF a través de una de sus aplicaciones matemáticas (antenas multibanda);
2. preguntas para reflexionar sobre las características propias de la GF, intentando relacionar los conceptos nuevos con lo que los profesores participantes ya manejan;
3. actividades que buscan generar interés, relacionando la GF con criterios estéticos y con su complejidad matemática.

El objetivo general del curso fue contribuir en la formación continua de los profesores en ejercicio, y en especial en GF, ya que la mayoría de los participantes expresaron haber tenido poco o nulo acercamiento con la temática. El curso abarcó dos actividades que refieren particularmente al concepto de Autosimilitud (AE) y al concepto de Dimensión Fractal (DF).

La modalidad fue a distancia y asincrónica a través de la plataforma CREA proporcionada por CEIBAL (https://www.ceibal.edu.uy/es.).

A lo largo del curso se propusieron 6 tareas, que permitieron analizar los diferentes conocimientos previos de los profesores y los que desarrollaron sobre GF.

La resolución alcanzada en cada tarea fue categorizada en una escala de 1, 2 o 3, a partir de una rúbrica construida con esta finalidad, siendo el nivel 3 el que denota más acercamiento al Conocimiento Especializado sobre GF o al Conocimiento Didáctico de la Propuesta.

En este trabajo se adoptó el esquema elaborado originalmente por Ball (2008), y se adaptó la categorización elaborada por Chen (2018) como muestra la Figura 1.

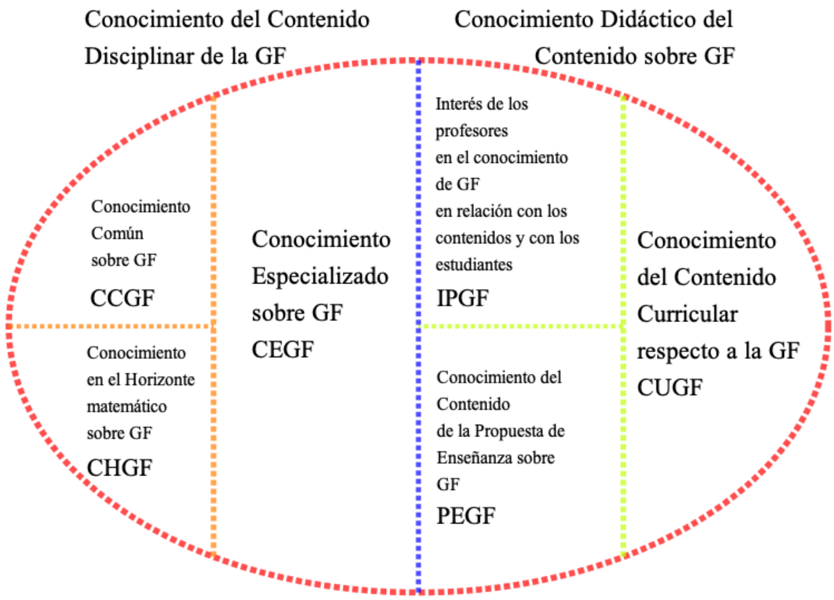


Figura 1: Diferentes tipos de Conocimiento Matemático para la enseñanza de la GF

Se sustituyó el Conocimiento del Contenido y de los Estudiantes por el Interés en el contenido GF y de los Estudiantes, ya que se busca analizar el interés que poseen los profesores de la escuela secundaria, en aprender y enseñar la GF.

Así, en este trabajo se precisan los constructos teóricos que se utilizan para el análisis de los datos obtenidos a la GF, de la siguiente manera:

1. el Conocimiento Común sobre GF (CCGF) como aquel conocimiento matemático utilizado en cualquier ámbito (científico o profesional) que sustenta aspectos claves de la GF (perímetro, área, límite, traslación, rotación, homotecia, logaritmo, etc.);
2. el Conocimiento en el Horizonte matemático sobre GF (CHGF) como toda expresión que dé cuenta de la continuidad o la complementación de esta geometría respecto a la geometría euclídea;

3. el Conocimiento Especializado sobre GF (CEGF) (también llamados por Ma (2020) clusters o “paquetes de conocimiento”) como el tratamiento operativo de las propiedades de autosemejanza estricta, de dimensión fractal y la descripción matemática de las transformaciones geométricas que permiten construir un fractal con autosemejanza estricta, para la GF.
4. el Conocimiento Curricular respecto a la GF (CUGF) como las aseveraciones en relación con la posibilidad de enseñar GF en los diferentes niveles de la enseñanza media y sus argumentos.

Algunos resultados

El análisis de las producciones de los participantes en el curso no se ha completado. Sin embargo, es posible indicar algunos resultados

Existen trabajos que describen que presentan la construcción de fractales a partir de la representación matricial de las transformaciones afines que conforman el Sistema Iterado de Transformaciones (Rubiano, 2009) que define el fractal, lo que indica un nivel en CEGF próximo al superior; sin embargo, esos mismos trabajos se ubican en las categorías 1 o 2 en relación con alguno de los otros tipos de conocimiento (CCGF, CHGF o CUGF).

Un resultado similar aparece en otras producciones que analizan la definición proporcionada en el curso de dimensión fractal.

En otras producciones, que evidencian un alto interés en GF y alcanzan el nivel 3 en CCGF y CUGF, no muestran un desarrollo comparable en CUGF y mantienen un manejo poco riguroso de las ideas centrales.

Algunos ejemplos de las producciones de los profesores participantes en el curso se exponen a continuación, para dar cuenta de los comentarios anteriores.

Como ejemplo de nivel 1 para la pieza de conocimiento Dimensión Fractal se tiene el de la Figura 2. En la Figura 2, se aprecia que, a pesar de que las imágenes mostradas corresponden al resultado de la primera iteración del fractal, la conclusión vislumbra la idea intuitiva de “llenado” al expresar frases como “mayor capacidad de relleno o “completa más el plano”.

Pieza de conocimiento 2: Dimensión Fractal (DIMF)

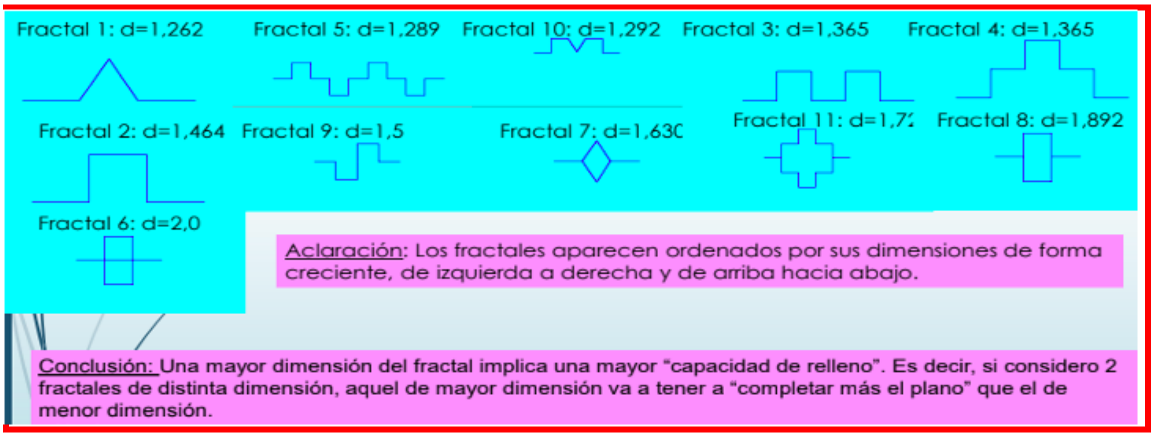


Figura 2: Ejemplo de nivel 1 de la pieza de conocimiento Dimensión Fractal

Una producción que alcanza el nivel 3 es el de la figura que sigue

Nº DE FRACTAL	DENSIDAD	CÁLCULO DE LA DENSIDAD
1	1,261	$\frac{\log 4}{\log 3}$
5	1,289	$\frac{\log 17}{\log 9}$
10	1,292	$\frac{\log 8}{\log 5}$
3 - 4	1,365	$\frac{\log 9}{\log 5}$
2	1,464	$\frac{\log 5}{\log 3}$
9	1,500	$\frac{\log 8}{\log 4}$
7	1,630	$\frac{\log 6}{\log 3}$
11	1,722	$\frac{\log 16}{\log 5}$
8	1,892	$\frac{\log 8}{\log 3}$
6	2,000	$\frac{\log 9}{\log 3}$

Cuanto mayor es la densidad de un fractal, podemos decir que el mismo será mas "lleno".

La dimensión fractal D, la podemos definir así:

$$D=\frac{\log p}{\log \alpha}$$

Donde p es la cantidad de subconjuntos de la partición correspondiente a un determinado paso de la iteración, y α es el factor de semejanza de cada subconjunto de la misma partición con la semilla.

Como la densidad es un cociente, éste dependerá de que tan grande sea el numerador y que tan chico sea el denominador.

Si consideramos a p como la cantidad de subconjuntos que hay en la partición, y α el factor de reducción, podemos pensar que cuanto menor es α, mayor es la longitud de los segmentos (subconjuntos de la partición).

Observando los resultados obtenidos:

- si comparamos fractales con **igual α**, es mas lleno el fractal que tenga mayor p, o sea mayor cantidad de subconjuntos en la partición. (segmentos)
- Si comparamos fractales con **igual p**, es más lleno el fractal que tenga menor α, o sea el que tenga segmentos de mayor longitud.

Figura 3: Ejemplo de nivel 3 de la pieza de conocimiento Dimensión Fractal

En la Figura 3 se puede apreciar que el profesor realiza observaciones matemáticas respecto al cociente de los logaritmos involucrados en la definición de Dimensión Fractal. En este caso, se comparan fractales que tienen el mismo factor de escala o la misma cantidad de subconjuntos de cada partición en cada iteración, lo que denota un análisis matemáticamente rico ya que se está contemplando a la Dimensión Fractal como una particularidad de cada fractal donde se involucra la cantidad de partes idénticas en que se dividen las iteraciones y los factores de escala con respecto a la semilla.

Reflexiones finales

La GF se ha gestado hace alrededor de 50 años, y aunque está presente en los diseños curriculares de varios países, hay necesidad de un análisis didáctico que se ocupe de cómo enseñarla. Éste fue en parte el cometido de las tres ediciones del curso, y en todas, los profesores tomaron con entusiasmo y profesionalismo la posibilidad de comenzar a pensar y repensar la GF y su transposición didáctica.

En las ediciones 2 y 3 los participantes recibieron la misma secuencia de actividades, pero fue diferente a la que tuvieron los participantes de la edición 1. La diferencia entre ambas propuestas para el curso fue que, en la edición 2 se agregó una actividad cuyo propósito apuntaba al estudio y a la aplicación de una definición de Autosemejanza Estricta elaborada por los tutores del curso, de la cual se deduce el cálculo de la Dimensión Fractal. Esta adaptación de la propuesta fue elaborada a partir del análisis de la edición 1, buscando superar algunas limitaciones detectadas en su desarrollo apelando a un mayor rigor matemático.

Los resultados obtenidos en las ediciones 2 y 3 son importantes insumos para continuar investigando de qué manera es posible formar profesores específicamente en Geometría Fractal, para desarrollar su conocimiento especializado para su enseñanza.

En particular, la aparente independencia entre los diferentes tipos de contenidos que se detectó en las producciones que se reseñaron es un tema de interés didáctico, que motiva un estudio más detallado.

Finalmente, las modificaciones realizadas en las ediciones 2 y 3, permiten formular la pregunta de si, a través del estudio de los conceptos de autosemejanza estricta y dimensión fractal, es posible diseñar intervenciones de enseñanza en la escuela secundaria, que aporten al estudiante en su desarrollo de competencias para el reconocimiento de patrones, los procesos de generalización, la modelización, la operatoria, la argumentación, entre otros.

Referencias bibliográficas

Ball, D. L., Thames, M. y Phelps, G. (2008). Content Knowledge for Teaching: What Makes It Special? *Journal of Teacher Education, 59*, 389, DOI: 10.1177/0022487108324554

Carrillo, J., Contreras, L.C., Climent, N., Escudero-Avila, D., Flores-Medrano, E., y Montes, M.A. (Eds.) (2014). *Un marco teórico para el conocimiento especializado del profesor de matemáticas.* Universidad de Huelva Publicaciones.

Carrillo, J., Montes, M., Contreras, L. y Climent, N. (2017). El conocimiento del profesor desde una perspectiva basada en su especialización: MTSK. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 22*. https://doi.org/10.4000/adsc.756

Chen, S., Herron, S., Ding, J. y Mohn, R. (2018). Assessing United States and Chinese secondary mathematics teachers' interest in fractal geometry. *Journal of mathematics education,11*, 2, pp. 17-34.

Chevallard, Y. (1999). *La Transposición Didáctica. Del saber sabio al Saber enseñado*. Editorial AIQUE.

Font, V. (2011). Competencias profesionales en la formación inicial de profesores de matemática de secundaria. *Unión, 26*, pp. 9-25.

Godino, J., Contreras, A. y Font, V. (2006). Análisis de procesos de instrucción basado en el enfoque ontológico-semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactiques des Mathématiques, 26*(1), 39-88.

Hill, H. C., Rowan, B. y Ball, D. L. (2005). Effects of Teachers Mathematical Knowledge for Teaching on Student Achievement. *American Educational Research Journal, 42*, (2), 371-406.

Hill, H., Blunk, M., Charalambos, C., Lewis, J., Phelps, G., Sleep, L., y Ball, D. (2008). Mathematical Knowledge for teaching and the Mathematical Quality of Instruction: An Exploratory Study. *Cognition and Instruction, 24*, 430-511.

Hill, H. C., Ball, D. L. y Schilling, S. G. (2008). Unpacking pedagogical content knowledge: Conceptualizing and measuring teachers' topic-specific knowledge of students. *Journal for Research in Mathematics Education, 39*, 372-400.

Karakus, F. (2013). A Cross-Age Study of Student´s Understanding of fractals. *Bolema, 27*(47), 829-846.

Ma, L. (2020). *Knowing and teaching elementary mathematics. Teachers´ understanding of fundamental mathematics in China and the United States. Studies in mathematical thinking and learning series*. Taylor & Francis. 20th anniversary ed.

Rubiano, G. (2009). *Iteración y fractales (con Mathematica).* Vicerrectoría Académica, Colombia, primera edición.

Schoenfeld, A. (2011). *How we think. A Theory of Goal-Oriented Decision Making and its Educational Applications*. Routledge Taylor & Francis Group.

Seckel, M., Breda, A. y Font, V. (2019). Los criterios de idoneidad didáctica en la formación de profesores. *ALME, 32*(2), 440-447.

Vygotsky, L. (1986). *Thought and Language*. (A. Kozulin, Trad.) Cambridge, Mass.: MIT Press.

Valoración de una actividad en contexto por estudiantes de ingeniería. aplicación de la geometría fractal en la construcción de antenas

Victoria Artigue[1], Joel Gak[2], María de los Ángeles Fanaro[3], Gabriela Mombrú[4], José Job Flores[5]

[1]maria.artigue@ucu.edu.uy, Universidad Católica del Uruguay – Departamento de Ciencias Exactas y Naturales, Uruguay

[2]jgak@ucu.edu.uy, Universidad Católica del Uruguay – Departamento de Ingeniería, Uruguay

[3]mariangelesfanaro@gmail.com, CONICET-NEES. Facultad de Ciencias Humanas. UNCPBA, Argentina

[4]gabriela.mombru@correo.ucu.edu.uy, Universidad Católica del Uruguay – Departamento de Ingeniería, Uruguay

[5]jose.flores@ucu.edu.uy, Universidad Católica del Uruguay – Departamento de Ciencias Exactas y Naturales, Uruguay

Tema: modelización de la realidad

Modalidad: comunicación breve

Nivel Educativo: terciario

Resumen: *En este trabajo se presentan las apreciaciones de los estudiantes de un curso de Álgebra lineal, ante la implementación de una propuesta de enseñanza, basada en la Geometría Fractal, y en particular en su aplicación para la fabricación de antenas multibanda. El interés didáctico por esta Geometría es reciente, constituyendo una problemática relevante, ya que es distinta a la Geometría Euclídea. Sin embargo, aún no ha sido ampliamente abordada en la educación matemática y en los currículos. Los antecedentes motivan a aprovechar los cursos de segundo año de carreras de ingeniería para su enseñanza, creando una oportunidad para motivar a los estudiantes a retomar algunos contenidos matemáticos. Se formula la siguiente pregunta de investigación: los estudiantes de un curso de Álgebra Lineal, ¿aprecian la propuesta interdisciplinar sobre Geometría Fractal, aplicada en el diseño de antenas? Se aplicó un cuestionario de 20 ítems con escala Likert, a 26 estudiantes y al finalizar el curso, constatándose un alto nivel de aceptación a propuestas (en los cursos de Matemática) que involucran áreas de su interés profesional.*

Palabras claves*: estudiantes de Ingeniería, Álgebra lineal, Geometría Fractal, antenas multibanda.*

Introducción y planteo del problema

El presente trabajo se enmarca en un modelo de enseñanza y aprendizaje que está siendo promovido por la Universidad Católica del Uruguay (UCU), que implica el desarrollo de competencias transversales en los estudiantes mediante actividades interdisciplinares. Uno de los ejes temáticos de su Plan Estratégico 2019-2021 es: "*excelencia en el aprendizaje interdisciplinario y transversal, de cara a un mundo disruptivo*" (p.3), que tiene como objetivo prioritario lograr la integración curricular transversal de los distintos programas de las asignaturas.

En la formación de futuros ingenieros, el estudio de la Matemática formal no es un objetivo en sí mismo, aunque se reconoce que los ingenieros necesitan matematizar problemas. Un conflicto cognitivo puede producirse en el estudiante que, en general, se enfrenta a la Matemática y a la ingeniería de forma separada durante su carrera (Camarena, 2009).

En este sentido se propuso enseñar algunos elementos de la Geometría Fractal (GF) en dos etapas distintas de formación de ingenieros universitarios: en un proyecto de iniciación a la investigación de la carrera Ingeniería Industrial y en un curso de Álgebra lineal correspondiente a segundo año de diversas carreras de Ingeniería (informática, electrónica, alimentos y audiovisual) de la Facultad de Ingeniería y Tecnología (FIT) de la UCU. Para ambos casos, se propuso una actividad que se desarrolló con modalidad diferente en cada caso, y consistió en el diseño, implementación y análisis del funcionamiento de una antena basada en el fractal triángulo de Sierpinski. El diseño de la actividad fue realizado por profesores de los departamentos de Ingeniería y Ciencias Exactas y Naturales. En este trabajo se presenta la propuesta de enseñanza, haciendo énfasis en aquellas actividades vinculadas al Álgebra lineal, y se analiza la percepción de los estudiantes al abordar la integración curricular transversal en un curso de Matemática, a través de un cuestionario de valoración del curso.

El objetivo de este trabajo es analizar la percepción 8del potencial de la propuesta para aprender GF de forma transversal con la construcción de antenas, por parte de los estudiantes de diversas carreras de ingeniería. Para alcanzar este objetivo, se formula la siguiente pregunta de investigación: los estudiantes de un curso de Álgebra Lineal, ¿aprecian la propuesta interdisciplinar sobre GF, aplicada en el diseño de antenas? En este sentido, la propuesta será apreciada por los estudiantes si:

- Entienden que ayuda a tener una visión de la interacción entre nociones matemáticas y del área de la Ingeniería (como son las antenas fractales) contribuyendo al aprendizaje de los conceptos de autosemejanza y dimensión fractal.

- Valoran positivamente el uso de las herramientas tecnológicas (applets, GeoGebra, videos, Python y sitios interactivos).
- Destacan que se genera interés, en el estudio de la Matemática, a través de una de sus aplicaciones.

Marco teórico

La Matemática en contexto

Este trabajo se centra en los procesos de enseñanza-aprendizaje que se presentan cuando los estudiantes afrontan a la Matemática a través de sus aplicaciones. Esto requiere el desarrollo de una competencia conocida como modelización matemática, esto es, la creación o la utilización de modelos matemáticos útiles para resolver problemas en contexto (Blum y Niss, 1991).

Uno de los objetivos didácticos, para la formación de los ingenieros, es brindarles herramientas conceptuales y funcionales que contribuyan a incorporar la modelización matemática como un proceso cíclico cuando se resuelve un problema de aplicación (Mendible, 2007). Un problema aplicado en Matemática está enmarcado en una situación o contexto del mundo real (el "resto del mundo" fuera de la Matemática), así como las preguntas que vinculan conceptos matemáticos con dicha situación (Blum y Niss, 1991). La implementación de este tipo de problemas no solo desarrolla las competencias matemáticas propias de la modelización, si no que genera un mayor interés por la asignatura y promueve un pensamiento diversificado en los estudiantes (Alsina, 2007).

El enfoque denominado "*la Matemática en el contexto de las ciencias*" o "*Mathematics in the sciences context*", en inglés, se basa en tres grandes supuestos: la Matemática es una herramienta en las ciencias y un tema educativo, la Matemática tiene una función específica en cada nivel de enseñanza, y el conocimiento ha de considerarse integrado (no fragmentado) (Camarena, 2009). Respecto a la actividad propia del estudiante, el objetivo es que esté capacitado para poder utilizar el conocimiento matemático en otras áreas que lo requieren en su ámbito profesional.

Uno de los focos de la electrónica ha sido la miniaturización (Moore, 1965), y las antenas no han sido la excepción. Se está dedicando esfuerzo en fabricarlas pequeñas y que además operen en diferentes frecuencias. Su estructura debe incluir, entonces, diferentes tamaños, y debe utilizar de manera eficaz el espacio que ocupa. Es pertinente pensar que las antenas diseñadas con GF pueden contemplar estas características: ser multibanda (debido a la propiedad de autosemejanza) y muy pequeñas (longitudes infinitas en áreas finitas).

En particular, la GF nació en un contexto que da mucha importancia a la geometría y al análisis matemático visual de situaciones reales y concretas (medir la costa de un país), en particular comenzó estudiando aspectos de la naturaleza. Es decir, la GF naturalmente está dotada para este enfoque de la Matemática en contexto de las ciencias.

¿Por qué la Geometría Fractal en Álgebra lineal?

En el ámbito de la enseñanza de la Matemática, se reconoce a la GF por su potencial para estudiar y/o recuperar buena cantidad de nociones matemáticas, y por la gran cantidad de aplicaciones que tiene. Sin embargo, un análisis realizado acerca de las investigaciones que proponen su enseñanza en el nivel medio y primeros años de universidad (Artigue et al., 2021), dio indicios que la forma en que esta geometría es enseñada es haciendo referencia a lo visual, a su aspecto estético. Esta manera ofrece muy pocas posibilidades para que un estudiante pueda interactuar con estos objetos matemáticos, sin ir más lejos que calcular áreas, perímetros y dimensión fractal en casos muy puntuales. Así, por ejemplo, se presentan ciertas formas geométricas obtenidas en un número fijo de iteración, y se lo introduce como un “fractal” sin establecer que el fractal, es la figura límite de esa iteración.

La GF estudia objetos geométricos que son producto de iterar un algoritmo, ya sea geométrico o polinómico, de forma infinita. Hubo (y aún hay) mucha polémica dentro de la comunidad matemática acerca de cómo definir estos objetos. El término fractal, proveniente del latín “fractus” (adjetivo que significa interrumpido o irregular) fue introducido por el matemático Benoit B. Mandelbrot en el año 1975, quien observó que la naturaleza es tan compleja que la Geometría Euclídea (GE) no alcanza para estudiarla, como es el caso de las formas naturales como una nube, una montaña o costas de países.

De esta manera, la GF permite describir una gran parte del mundo que nos rodea, estableciendo modelos matemáticos para estudiar formas irregulares y fragmentadas de la naturaleza, considerándolas estructuras complejas a partir de la repetición de estructuras más simples. Son varios los campos disciplinares que utilizan la GF: medicina, geología, física, tecnología, entre otras, y, en todos ellos, la GF explica cuestiones que la GE no alcanza (Fusi y Sgreccia, 2020).

En concordancia con el plan estratégico de la UCU mencionado antes y con el Programa oficial de la materia Álgebra lineal que se imparte en las distintas carreras que se ofrecen en la UCU, se propone utilizar el potencial de la GF para estudiar las antenas fractales.

Un punto de partida interesante es considerar que los fractales son figuras, cuyas principales características son la autosemejanza y la intervención de dos parámetros fundamentales que definen el otro concepto clave, el de dimensión fractal: la cantidad de partes en que se divide el objeto y el tamaño de esas partes (Castiblanco Hernández y Montana Páez, 2018). Así, se asume que son dos los elementos que caracterizan a la GF: la autosemejanza y la dimensión, en este caso denominada dimensión fractal.

La propiedad de autosemejanza no se cumple de igual manera en cualquier fractal, hay diferentes tipos de autosemejanza según la cantidad de puntos en que se pueda apreciar la presencia de copias idénticas de sí misma (Artigue et al., 2021). Pero, si se busca una formulación matemática de la autosemejanza que pueda ser abordada en un curso de Álgebra lineal, es necesario hacer referencia al concepto de semejanza de la GE para estudiar aquellos fractales que poseen autosemejanza del tipo estricta.

Una transformación de semejanza en el plano es definida como una función del plano en el plano que se obtiene mediante la composición de una homotecia con una isometría (rotación, traslación o simetría); estas transformaciones geométricas son estudiadas en el curso de Álgebra lineal desde un punto de vista matricial y además como transformaciones lineales y afines. Para el estudio de los fractales, dichas transformaciones deben ser contractivas, es decir con razón de homotecia entre cero y uno, por lo que al aplicarla reduce la distancia entre dos puntos cualesquiera de la figura imagen.

Estas transformaciones deben aplicarse iteradamente, constituyendo un Sistema de Funciones Iteradas (SFI). Con los SFI los matemáticos lograron una unidad en tanta diversidad, definiendo transformaciones geométricas del plano en el plano a través de transformaciones afines de forma matricial (Rubiano, 2009) utilizando recursos de Álgebra lineal. Un SFI debe dar cuenta de las transformaciones que se aplican a la figura original llamada semilla. Debe proveer la información necesaria respecto del número de transformaciones que lo componen y sus características, como ser: la razón de homotecia o razón de contractividad, las posiciones relativas respecto al iniciador, y su traslación o rotación, el orden en el cual se aplican.

Con independencia de la figura original, el comportamiento límite del SFI garantiza que, cada algoritmo fractal dé lugar a una figura límite, y sólo una (Pérez Medina, 2007). Por lo tanto, cada conjunto formado por transformaciones de semejanza define una imagen fractal denominada atractor del SFI, que siempre existe y es único. (Moreno-Marin, 2002). Este aspecto dota a los fractales de la propiedad de autosemejanza estricta (Pérez Medina, 2007).

En el curso de Álgebra lineal de la UCU y en los textos clásicos de esta asignatura, el concepto de dimensión es definido tradicionalmente como la cantidad de vectores que presenta una base de un cierto Espacio Vectorial (Grossman y Flores, 2019) esto es, la ampliación del concepto de dimensión euclídea.

La propuesta de actividades y su implementación con los estudiantes de Álgebra lineal

El curso de Álgebra lineal desarrollado en 2021 tuvo una duración de un semestre curricular (4 meses), con modalidad a distancia debido a la pandemia COVID-19. Se incluyó una práctica grupal de laboratorio para construir una antena fractal. El total de alumnos que participaron fue 26. Durante todo el curso, se propusieron actividades referidas a la GF, las cuales se resumen en la Tabla 1.

Nombre de la actividad	Consigna	Propósito
1. Videos sobre antenas fractales	Estudiar un video sobre antenas fractales e identificar sus principales ventajas.	Introducir el concepto matemático fractal y sus propiedades características.
2. Mathigon	Interactuar con el libro Mathigon y realizar todas las actividades que se plantean en el libro.	
3. Construcción en GeoGebra	Diseñar en GeoGebra la cuarta iteración de los fractales. Conjunto de Cantor y Alfombra de Sierpinski.	Identificar las transformaciones geométricas necesarias para la construcción de los fractales. Determinar dichas transformaciones en forma matricial. Utilizar en GeoGebra comando AplicaMatriz.
4. Autosemejanza y Dimensión	Utilizar la definición propuesta en las notas del curso de autosemejanza estricta y dimensión fractal.	Justificar matemáticamente la autosemejanza estricta y la dimensión de un fractal.

5. Diseñar una antena fractal	Diseñar en GeoGebra una antena fractal basada en el triángulo de Sierpinski, dados ciertos parámetros.	Utilizar transformaciones geométricas, comando AplicaMatriz o crear nueva herramienta para diseñar en GeoGebra una antena fractal basada en el triángulo de Sierpinski.
6. Construcción de una antena fractal	Construir en placa de cobre la antena en forma de circuito impreso.	
7. Estudio del comportamiento de la antena construida	Utilizar radios definidas por software para analizar el comportamiento de la antena	Medir las características de la antena utilizando radios definidos por el software (SDR) disponibles en el Departamento de Ingeniería de UCU.

Tabla 1: Actividades de enseñanza

La actividad 3 fue propuesta luego de haber abordado operaciones con matrices. Particularmente se trabajó con transformaciones matriciales, asociando la transformación geométrica y la matriz correspondiente. El comando AplicaMatriz fue utilizado en algunos casos, en otros se utilizó la posibilidad de crear una “herramienta nueva”. Esto dio el puntapié para determinar el SFI correspondiente para el triángulo de Sierpinski. La figura 1 muestra la producción de uno de los estudiantes:

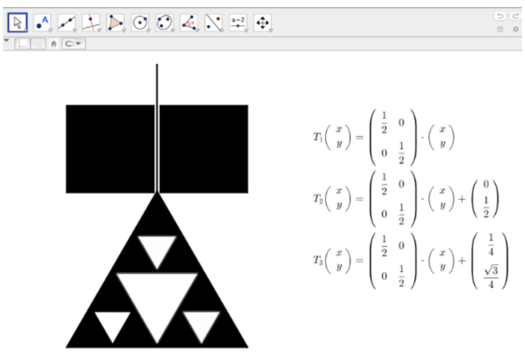


Figura 1: Diseño en GeoGebra de una antena basada en el triángulo de Sierpinski, producción realizada por un estudiante.

Para la actividad 6, se tomó en cuenta la tesis Diseño e implementación de antenas fractales para UHF la cual tiene como objetivo general diseñar y simular una antena fractal utilizando el triángulo de Sierpinski (Sandoval y Vire, 2008). Si bien el tamaño de la antena es especificado, en la actividad del curso fue modificado y ajustado al tamaño del sustrato de cobre disponible en el laboratorio de electrónica (10cm por 10cm). Una vez pronto el diseño y verificadas las escalas, procedimos a la creación de la antena; para esto fue necesario tener los materiales específicos, los cuales fueron: una plancha, tijera, marcadores, placas de cobre, hojas de acetato y ácido ferrítico. Con estos materiales reunidos, se imprimió el diseño en la lámina de acetato para pasar por calor a la placa de cobre (proceso de sublimación casero). Se utilizaron marcadores para repasar el diseño en caso de que la transferencia tuviera algún detalle.

El siguiente paso fue llevar la placa a un recipiente con ácido sulfúrico para que el mismo quitara las zonas restantes de cobre que no forman parte de la antena. El conector de la antena fue ensamblado con una fresadora numérica, para realizar los orificios necesarios, luego el conector fue soldado con estaño para la lograr la conexión eléctrica. En la Figura 2 se muestra el procedimiento realizado por uno de los grupos de estudiantes.

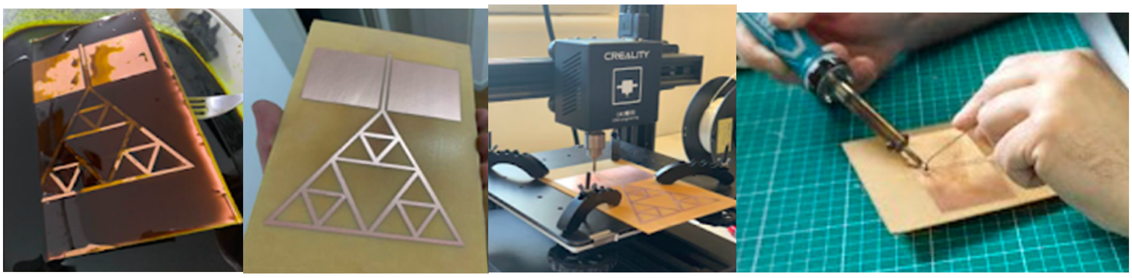


Figura 2: Proceso de construcción de la antena, producción de estudiantes.

Metodología

La metodología aplicada a este estudio es cualitativa y descriptiva. Se realizó un análisis evaluativo como paso específico del análisis didáctico ya que el objetivo fue identificar las fortalezas y debilidades de la propuesta sobre GF, previendo dificultades y señalando las oportunidades para mejorarla (Rico, 2013).

En el marco de la evaluación del curso de Álgebra lineal correspondiente a carreras de Ingeniería de los primeros años, se elaboró un cuestionario, administrado por Google, de valoración a 26 estudiantes, que lo respondieron al finalizar la implementación de la propuesta. Al principio del cuestionario se plantearon dos preguntas que buscaban que los estudiantes valoraran el curso globalmente, seleccionando una opción (desde malo hasta excelente) y justificaran dicha selección. Luego se propuso un conjunto de afirmaciones para las que cada estudiante tenía que valorar con una escala Likert (1932) de cuatro niveles de acuerdo: Totalmente en desacuerdo (1), En desacuerdo (2), De acuerdo (3) y Totalmente de acuerdo (4). Los ítems se codificaron como Q1, Q2, …, Q20, en relación con el número de ítem (ver Anexo).

Resultados

Un análisis descriptivo y cualitativo de las respuestas a las preguntas de valoración general del curso, indica que el curso fue evaluado entre muy bueno (50%) y excelente (50%). La valoración de las actividades fue para el 85% de los estudiantes, como interesantes y muy interesantes. Entre los aspectos que más destacaron de la propuesta, mencionan el trabajo colaborativo; la aplicación de la Matemática en las antenas fractales; el uso de software; el dinamismo y la práctica en laboratorio; y los fractales como algo distinto en la clase de Matemática. Algunos comentarios de los estudiantes (E) en las primeras preguntas de apreciación general del curso, que ejemplifican estas afirmaciones son los siguientes:

E1: "*El tema de Fractales me pareció muy interesante, en particular poder aplicarlo a casos concretos, y lo mismo con matrices. Además, para conceptos abstractos como la dimensión, siento que ayudaron mucho las actividades interactivas como el libro de Mathigon. También fue muy bueno hacer la antena, y fue muy divertido cuando disolvimos una batea de aluminio. Me gustó mucho hacer un proyecto de este estilo en vez de un examen clásico. Siento que aprendí un montón y disfruté el proceso, no fue un cierre estresante como suele ser en otras materias*."

E2: "*Las actividades que hicimos me resultaron interesantes y concretamente la tarea final, ya que nos lleva a salir de nuestra zona de confort y participar de una actividad que involucra varias áreas y trabajo práctico que resulta entretenido*."

E3: "*Creo que el tema Fractal fue una buena elección porque se rompió con los cursos convencionales de Matemática y por ende fue divertido y más ameno.*"

En cuanto a la posibilidad que presenta la propuesta para contribuir al aprendizaje de los conceptos de autosemejanza y dimensión y la descripción de un fractal, los resultados son alentadores. Si bien el 69% de los estudiantes reconoció cierta dificultad para la construcción de un fractal usando elementos del Álgebra lineal (Q9), el 77% de los estudiantes sostuvo que la definición de autosemejanza estricta presentada facilitó su comprensión de la dimensión fractal (Q6). Por su parte, un 69% de los estudiantes declaró que comprender que la dimensión fractal puede ser un número no entero, no resulta tan difícil (Q8). Finalmente, el 81% de los estudiantes reconoció la importancia de sus conocimientos de geometría básica para explicar la construcción de algunos fractales (Q4).

En cuanto a la valoración del uso de las herramientas tecnológicas, casi la totalidad de los estudiantes (96%) indicó que los materiales interactivos ayudaron a comprender las características de los fractales (Q2), aunque para un poco menos de la mitad de los estudiantes (46%) el conocimiento necesario de GeoGebra representó cierta dificultad (Q3). A pesar de este obstáculo, un 73% admitió que utilizar GeoGebra fue gratificante para construir una iteración particular de un fractal (Q7).

En cuanto a la posibilidad de generar interés en el estudio de la Matemática, un 85% considera que estudiar fractales le hizo pensar en cuestiones nuevas, como procesos infinitos, patrones u operaciones que se repiten indefinidamente (Q11). Casi todos (92%) aceptan que los fractales representan una Matemática actual con aplicaciones tecnológicas en auge (Q14), tanto que el 69% está en desacuerdo con la idea de que la Matemática es demasiado abstracta y sin aplicaciones (Q15).

En cuanto al estudio de la Matemática en contexto, casi todos los estudiantes (92%) valoraron positivamente la incorporación de las antenas fractales en el curso (Q1). Más de la mitad de ellos (62%) reconoció que el aprendizaje de fractales tiene mucha relación con su formación profesional (Q12). Así un 85% expresó que le gustaría saber más sobre fractales y sus usos en otras áreas (Q13). El 73% estuvo de acuerdo con que estudiar Matemática en contexto, representa una ayuda a su estudio (Q16). El 73% declaró estar en desacuerdo con que la construcción de la antena fuera difícil a pesar de haberlo hecho en grupo (Q19), y un 92% expresó que el trabajo colaborativo ayudó a que la construcción de la antena fuera una tarea fácil (Q17). Casi todos los estudiantes (96%) expresaron sentir emoción cuando constataron que la antena funcionaba (Q18), y el mismo porcentaje estuvo de acuerdo con la importancia de incorporar actividades en contexto en los cursos de Matemática para fortalecer habilidades para futuros ingenieros (Q20).

Reflexiones finales

El objetivo de este trabajo fue conocer la valoración de los estudiantes de ingeniería de una propuesta de enseñanza interdisciplinar entre la Matemática y las Telecomunicaciones. El foco de la propuesta fue el diseño, implementación y análisis del funcionamiento de una antena basada en un objeto fractal conocido, involucrando a los profesores de los departamentos de Ingeniería y Ciencias Exactas y Naturales de la UCU. Luego de implementar la propuesta, los estudiantes respondieron de forma anónima a un cuestionario que relevó en qué medida ellos apreciaron la propuesta en su formación como futuros ingenieros.

Los resultados del análisis del cuestionario indican una muy buena aceptación de la propuesta de enseñanza sobre aspectos esenciales de la GF, ya que los estudiantes se mostraron entusiastas con las actividades con el software y con la construcción de la antena. Esto ofrece un panorama alentador en cuanto a las posibilidades de que una enseñanza interdisciplinar como se propone desde la Universidad tenga buena aceptación por parte de los estudiantes e impacte de forma positiva en sus aprendizajes y su valoración de la Matemática como herramienta para modelizar situaciones propias de su campo de acción como ingenieros.

Si bien estos resultados animan a revisar la propuesta y a realizar algunos cambios que involucren el uso de herramientas informáticas más sofisticadas y especializadas, como el uso de Python que los estudiantes de este nivel conocen, quedan algunos desafíos planteados para seguir investigando, por ejemplo, diseñar la mayor cantidad posible de unidades temáticas de la materia Álgebra Lineal, buscando enseñar la Matemática a partir de sentido más genuino, que es el de modelizar las situaciones propias de la ingeniería.

Referencias bibliográficas

Alsina, C. (2007). Teaching applications and modelling at tertiary level. Modelling and Applications in Mathematics Education, *The 14th ICMI Study*, *10*(44), 469–474. doi:10.1007/97803872982212

Artigue, V., Fanaro, M., y Lacués, E. (2021). Estado del arte sobre la enseñanza y el aprendizaje de la Geometría Fractal en la escuela secundaria. *Pensamiento Matemático*, *11* (2), 75-92.

Binimelis, M. (2012). *Una nueva manera de ver el mundo*. La Geometría Fractal. RBA editores.

Blum, W. y Niss, M. (1991). Applied mathematical problem solving, modelling, applications, and links to other subjects - state, trends and issues in. Mathematics instruction. *Educational studies in mathematics*.

Camarena, P. (2009). Mathematical models in the context of sciences. Mathematical applications and modelling in the teaching and learning of mathematics. *Proceedings from Topic Study Group 21 at the 11th International Congress on Mathematical education*, 117-132.

Castiblanco, S. y Montana, S. (2018). *Geometría y dimensión: representación y caracterización de objetos 2d, 3d y 4d.* Tesis de Licenciatura. Departamento de Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional como requisito para optar por el título de Licenciado en Matemáticas. http://repository.pedagogica.edu.co/bitstream/handle/20.500.12209/11153/TE-22698.pdf?sequence=1&isAllowed=y

Fusi, F. y Sgreccia, N. (2020). ¿Por qué enseñar la noción de fractal en el último año de la escuela secundaria? Opiniones de especialistas en Geometría. *Épsilon*, *105*, 31-50.

Likert, R. A. (1932). Technique for the Measurement of Attitudes. *Archives of Psychology 140*, 1-55.

Mendible, A., y Ortiz, J. (2007). Modelización Matemática en la formación de ingenieros. La importancia del contexto. *Enseñanza de la Matemática, 16*, 133-150.

Moreno-Marín, J. (2002). Experiencia didáctica en Matemáticas: construir y estudiar fractales. *Suma, 40*, 91-104.

Moore, G. (1965). Cramming more components onto integrated circuits. *Electronics*, *38* (8).

Peitgen, H., Jürgens, H. y Saupe, D. (2004). *Chaos and Fractals*. New Frontiers or Science. Second Edition. Springer.

Pérez Medina, C. (2007). *Transformaciones lineales afines y fractales*. Trabajo de grado.

Plan Estratégico UCU 2019 – 2024. Universidad Católica del Uruguay. available online at: https: //ucu.edu.uy/sites/default/files/plan-estrategico-2019-2024.pdf

Plan Estratégico UCU 2019 – 2024. Universidad Católica del Uruguay. available online at: https: //ucu.edu.uy/sites/default/files/plan-estrategico-2019-2024.pdf

Rico, L. (2013). El método del Ánalisis Didáctico. *Unión*, *33*, 11-27.

Rubiano, G. (2009). *Iteración y fractales (con Mathematica).* Vicerrectoría Académica.

Sandoval, F. y Vire, S. (2008). *Diseño e implementación de antenas fractales para UHF*. Proyecto fin de carrera.

Anexo

Cuestionario de valoración de la propuesta.

Q1. Los fractales se ajustan a los temas del curso de Álgebra lineal, y más estudiando sus aplicaciones tecnológicas.

Q2. Los materiales interactivos (libros, sitios, applets) ayudaron a que comprendiera algunas características de los fractales.

Q3. El conocimiento necesario para usar GeoGebra fue un obstáculo para completar algunas tareas.

Q4. Mis conocimientos de geometría permitieron poder explicar la construcción de algunos fractales.

Q5. Algunas de las características de los fractales me resultaron difíciles de aprender.

Q6. Utilizar la definición de autosemejanza estricta me permitió comprender “más matemáticamente” la idea de dimensión.

Q7. Utilizar GeoGebra para construir un fractal me resultó gratificante.

Q8. No me resultó difícil comprender qué significa que la dimensión fractal puede ser un número no entero.

Q9. Es difícil describir con precisión la construcción de un fractal usando lenguaje algebraico para describir las transformaciones necesarias.

Q10. A veces un material interactivo puede inducir a errores, porque solo puede mostrar los primeros pasos de la construcción de un fractal y no es posible representar el fractal mismo.

Q11. Tomar contacto con fractales me hizo pensar en cosas que no había considerado antes, como procesos infinitos, o reconocer patrones o similitudes, u operaciones que se repiten indefinidamente.

Q12. Lo que aprendí de fractales no se relaciona con mi formación profesional.

Q13. Me gustaría saber más sobre fractales, para saber si tienen usos en otras áreas.

Q14. Los fractales muestran una Matemática nueva y aplicaciones recientes (antenas, mercados financieros) y por eso vale la pena estudiarla.

Q15. Habiendo aprendido de fractales, refuerzo la idea de que la Matemática es demasiado abstracta y sin aplicaciones.

Q16. Poder relacionar fractales con aplicaciones que me interesan me ayudó a estudiarlos.

Q17. El trabajo colaborativo ayudó a que la construcción de la antena me resultara una tarea fácil.

Q18. Me causó emoción poder constatar que la antena funcionaba

Q19. La construcción de la antena fue difícil para mí a pesar de haberla hecho en grupo.

Q20. Es importante que haya este tipo de tareas en los cursos de Matemática para fortalecer habilidades necesarias en un futuro ingeniero.

El conocimiento matemático especializado de los futuros maestros para la enseñanza de las fracciones

Un estudio de casos

Ana González

ana.gonzalez225@gmail.com. Uruguay

Tema: Formación profesional

Modalidad: Comunicación breve

Nivel educativo: Terciario

Resumen: *En este trabajo se reporta un estudio de casos que consiste en la exploración y descripción del conocimiento matemático y didáctico que poseen los estudiantes avanzados de magisterio de un instituto público de Montevideo, para enseñar el concepto de fracción en su interpretación parte-todo. Para llevar adelante la investigación se opta por un estudio de carácter mixto. En una primera instancia se aplica un cuestionario con un enfoque cuantitativo y posteriormente se realizan entrevistas con un enfoque cualitativo. A partir de los datos y del análisis que se realiza de ellos en las diferentes etapas, se obtuvieron diversos hallazgos en cuanto al conocimiento didáctico y matemático de los futuros maestros. En particular, se recogen evidencias que ponen de manifiesto dificultades matemáticas en el tratamiento de fracciones que involucran magnitudes discretas o mayores a la unidad.*

Palabras claves: *fracción, parte-todo, conocimiento didáctico, conocimiento matemático.*

Introducción

Algunos investigadores como Fandiño Pinilla (2007), Martínez y Lascano (2001), Obando (2003) y Pazos (2009) han explorado las dificultades que atraviesan los estudiantes al trabajar y aplicar el concepto de fracción en sus múltiples significados. Mientras que otros investigadores, tales como Ivars et al. (2016), González Retana y Eudave Muñoz (2018) y Rojas et al. (2015), han centrado su interés en indagar sobre el conocimiento que es necesario que tenga un docente para enseñar matemática y en particular, el concepto de fracción. Los investigadores González Retana y Eudave Muñoz (2018) en sus estudios, indican que tanto las fracciones como los números decimales son un reto de aprendizaje y enseñanza para los estudiantes y profesores, respectivamente, por lo que resulta un desafío para aquellos que se están formando como profesores. A partir de los trabajos revisados se infiere, entonces, la importancia de seguir avanzando en estudios que clarifiquen el conocimiento que los futuros docentes necesitan para poder abordar en las aulas el concepto de fracción en sus múltiples significados. Es por lo anterior que este trabajo centra el interés en el significado de la fracción como relación parte-todo.

Marco conceptual

El modelo MTSK

Para abordar este trabajo se adopta el modelo denominado Conocimiento Especializado del Profesor de Matemática (MTSK por sus siglas en inglés). Dicho modelo pretende explicitar qué conocimientos son fundamentales para que un docente lleve adelante su tarea de enseñar matemática. En particular, en el modelo se definen dos dominios de conocimiento denominados: conocimiento matemático (MK) y conocimiento didáctico del contenido (PCK). Cada uno de los dominios se divide a su vez en tres subdominios que permiten explicar diferentes conocimientos del docente (Carrillo et al., 2018), ver Figura 1, definiéndose de este modo un total de seis subdominios. Los autores del modelo señalan además que todos estos subdominios se van a ver atravesados por las creencias que los docentes tengan sobre la propia matemática y sobre la enseñanza y el aprendizaje de la matemática.

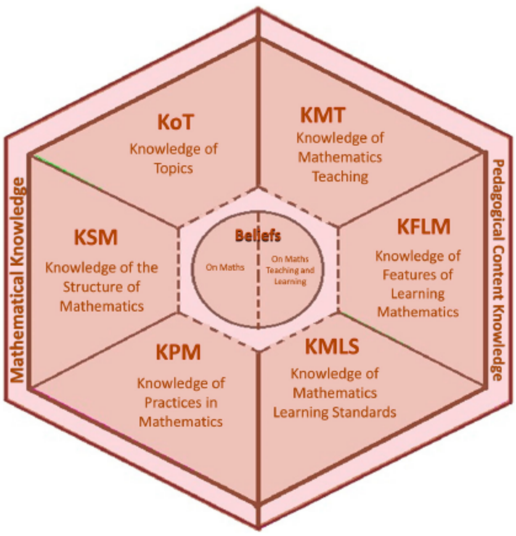


Figura 1: Dimensiones del modelo MTSK (Carillo et al., 2018)

En este trabajo el interés se centra en los subdominios Conocimiento de los Temas (KoT) y Conocimiento de las Características del aprendizaje de las Matemáticas (KFLM). En particular, el subdominio KoT refiere al conocimiento que el docente tiene sobre los contenidos matemáticos tales como procedimientos, conceptos, teoremas, entre otros, mientras que el KFLM refiere al conocimiento que el docente tiene de cómo aprenden los estudiantes, cómo piensan, qué errores frecuentes cometen, etc. (Flores-Medrano, 2016).

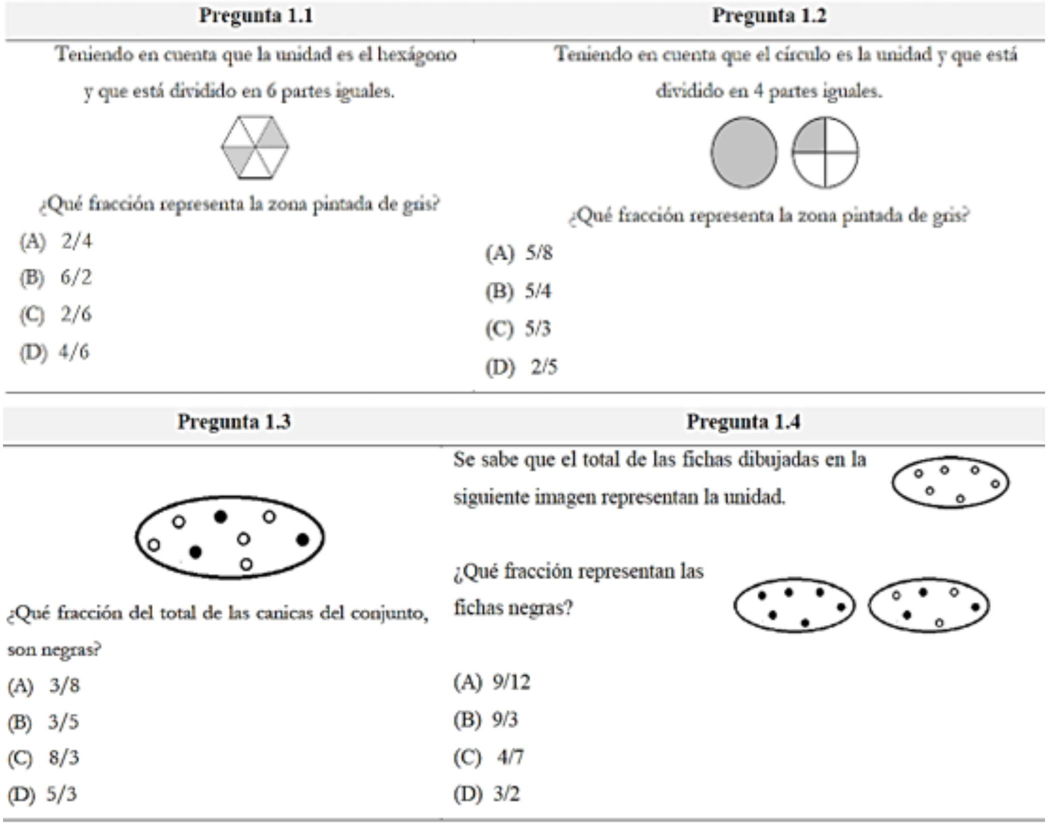
El concepto de fracción

Llinares y Sánchez (1997) señalan que para hacer alusión al concepto de fracción es necesario referirse al término como un megaconcepto. Los autores reportan que para comprenderlo hay que tener en cuenta los subcontructos e interpretaciones que de él se derivan. En particular, al realizar una revisión bibliográfica se recogen múltiples significados del concepto, entre los cuales destacamos: parte-todo, medida, cociente, operador y razón. Esta investigación profundiza en el concepto de fracción como relación parte-todo que según Llinares y Sánchez esta interpretación se da cuando "(...) un "todo" (continuo o discreto) se divide en partes "congruentes" (equivalentes como cantidad de superficie o cantidad de "objetos"). La fracción indica la relación que existe entre un número de partes y el número total de partes" (1997, p.55).

Se puede ver que el significado parte-todo que se le da a la fracción acarrea múltiples dificultades que permiten explicar el fracaso de los estudiantes al aplicar el concepto de fracción.

Método

Se aplicó un cuestionario de carácter cuantitativo a una muestra de 72 estudiantes de un instituto de formación de maestros público de Montevideo (ver Figura 2). Dicho cuestionario consta de 19 preguntas múltiple opción, divididos en 9 bloques, que permiten recoger información sobre el conocimiento (KoT) que poseen los estudiantes avanzados de magisterio. Cada uno de los bloques permite recoger evidencias de algún aspecto del concepto de fracción.



Pregunta 1.1	Pregunta 1.2
Teniendo en cuenta que la unidad es el hexágono y que está dividido en 6 partes iguales. ¿Qué fracción representa la zona pintada de gris? (A) 2/4 (B) 6/2 (C) 2/6 (D) 4/6	Teniendo en cuenta que el círculo es la unidad y que está dividido en 4 partes iguales. ¿Qué fracción representa la zona pintada de gris? (A) 5/8 (B) 5/4 (C) 5/3 (D) 2/5

Pregunta 1.3	Pregunta 1.4
¿Qué fracción del total de las canicas del conjunto, son negras? (A) 3/8 (B) 3/5 (C) 8/3 (D) 5/3	Se sabe que el total de las fichas dibujadas en la siguiente imagen representan la unidad. ¿Qué fracción representan las fichas negras? (A) 9/12 (B) 9/3 (C) 4/7 (D) 3/2

Figura 2: Pregunta 1 del cuestionario

Luego de la aplicación del cuestionario se realiza un análisis de los resultados obtenidos, definiendo así tres niveles según los puntajes alcanzados (bajo, medio y alto). Posteriormente seleccionamos aleatoriamente dos estudiantes representantes del nivel bajo y alto y tres del nivel medio. A estos siete estudiantes seleccionados se les realiza una entrevista que permite recoger información sobre el conocimiento didáctico del contenido (KFLM) y además complementar los hallazgos del cuestionario en cuanto al KoT.

Resultados

Conocimiento matemático (KoT)

Las cuatro preguntas que se muestran en la Figura 2 conforman el bloque 1 del cuestionario que permitió recoger información sobre el KoT. Dicho bloque tiene como objetivo determinar si los estudiantes logran vincular representaciones gráficas básicas de fracciones, dadas en diferentes contextos, mayores y menores que la unidad, con su representación fraccional. En la Tabla 1 se muestra un resumen de las preguntas y la frecuencia con la cual se eligió cada una de las opciones de respuesta, visualizando en color verde la opción correcta para cada pregunta y una columna final que indica la cantidad de encuestados que no respondieron a la pregunta indicada.

Los datos relevados en la Tabla 1 nos permiten afirmar, que en promedio **4572** (63,5 %) de los estudiantes encuestados contesta de forma acertada a las preguntas del bloque 1. Esto permite reportar que más de la mitad de los encuestados logran vincular representaciones gráficas mayores y menores que la unidad con su representación fraccional en contextos continuos y discretos, reconociendo la unidad de referencia y las partes. Asimismo, podemos ver que, en promedio, **2672** (35,8 %) estudiantes no logra contestar a las preguntas del bloque de forma correcta mientras que un 0,7% omite contestarlo.

	A	B	C	D	En blanco	Porcentaje de acierto	Porcentaje de error	Porcentaje de omisión
Pregunta 1.1	0	1	71	0	0	98,6	1,4	0
Pregunta 1.2	38	28	3	1	2	38,9	58,3	2,8
Pregunta 1.3	69	0	3	0	0	95,8	4,2	0
Pregunta 1.4	53	4	0	15	0	20,8	79,2	0

Tabla 1: Cuestionario 1, bloque 1

En las preguntas 1.1 y 1.2 los estudiantes deben reconocer las partes, el todo y el vínculo entre estas en representaciones continuas, ver Figura 2. A partir de la información recabada podemos decir que en promedio **5072** (68,8%) logra reconocer de forma correcta las partes, el todo y la fracción representada en contextos continuos, **2172** (29,8%) lo hace de forma incorrecta y **172** (1,4%) no lo hace.

En la pregunta 1.2 podemos ver que la opción incorrecta más elegida es la A. Esta opción permite evidenciar que para encontrar el numerador y el denominador de una fracción los estudiantes cuentan el total de partes pintadas y el total de partes disponibles, respondiendo que la fracción es "partes pintadas" sobre "total de partes en que se dividió el todo" sin considerar la unidad de referencia que, por ejemplo, en el caso de la pregunta 1.2 es el círculo.

En cuento a las preguntas 1.3 y 1.4 que implican el reconocimiento de las partes, el todo y la fracción involucrada en representaciones donde la unidad es un conjunto discreto, ver Figura 2, podemos ver que en promedio **4272** (58,3%) lo hace de forma correcta y **3072** (41,7%) lo hace de forma incorrecta.

En acuerdo con lo indicado por Obando (2003) y León-Mantero et al. (2016) el manejo de fracciones que implican el uso de magnitudes discretas resulta más complejo a los estudiantes. Tal como se reportó en los párrafos anteriores **5072** (68,8%) estudiantes contestan de forma correcta a las preguntas donde la representación gráfica está sujeta a un contexto continuo, mientras que **4272** (58,3%) estudiantes lo hacen a las preguntas que implican el trabajo en contextos discretos.

Por otro lado, las preguntas 1.1 y 1.3 fueron en las que se obtuvieron mayor porcentaje de acierto pues son contestadas de forma correcta por un 98,6% y un 95,8% respectivamente. De forma contraria las preguntas 1.2 y 1.4 son las que tienen un porcentaje de acierto menor 38,9% y 20,8% respectivamente. En particular, la gran diferencia de acierto entre unas preguntas y otras radica en que en las dos primeras se pedía a los estudiantes vincular una representación gráfica menor que la unidad con su representación fraccional, mientras que en las preguntas donde el porcentaje de acierto fue menor se pedía vincular una representación gráfica mayor que la unidad con su respectiva representación fraccional.

A partir de lo mencionado en el último párrafo se infiere que los estudiantes encuestados presentan dificultad en el reconocimiento del "todo" (D1) cuando las fracciones involucradas son mayores a la unidad (Pazos, 2009) pese a que dicho "todo" sea explicitado. En consecuencia, podemos ver que tanto en la pregunta 1.2 como en la 1.4 la opción incorrecta más elegida es la A. Esto último permite evidenciar que para encontrar el numerador y el denominador de una fracción los estudiantes cuentan total de partes pintadas y el total de partes disponibles, respondiendo que la fracción es "partes pintadas" sobre "total de partes en que se dividió el todo" sin considerar la unidad de referencia que, por ejemplo, en el caso de la pregunta 1.2 es el círculo. Pazos (2009) advierte que, en general, las fracciones mayores a la unidad son menos intuitivas para trabajar la relación parte-todo y por tanto, son utilizadas con menor frecuencia en las aulas. En el caso de la pregunta 1.2 al elegir la opción A se infiere que el estudiante está interpretando que para encontrar la fracción tiene que dividir los dos círculos en 4 partes iguales y contar cuántas partes quedan pintadas (5) del total de partes disponibles (8) tal como se procedería en representaciones que son menores a la unidad. En el caso de la pregunta

1.4 vemos que sucede algo similar pues los estudiantes eligen la opción 9/12 donde el numerador nos indica la cantidad de canicas pintadas de negro y el denominador la cantidad total de canicas, sin importar que la unidad era la colección formada por 6 canicas.

En este bloque vemos que predomina el concepto de fracción como conteo de partes, es decir la fracción es vista como partes pintadas sobre total de partes entre las que se ha dividido la unidad (Pazos, 2009). Este concepto funciona bien para las preguntas 1.1 y 1.3 donde la fracción que se trabaja es menor a la unidad, pero fracasa para el caso en donde la fracción a encontrar es mayor a la unidad.

Conocimiento de las características del aprendizaje (KFLM)

Luego del cuestionario, como ya se mencionó, se realizaron entrevistas a los futuros maestros. En dichas entrevistas se les presentó a los estudiantes de magisterio una actividad que era propuesta a escolares, ver Figura 3, donde se muestran seis representaciones para las cuales deben decir si se corresponden con ¾, cabe destacar que dicha actividad es una adaptación de la presentada por Ivars et al. (2016). Posteriormente, se le presenta a los entrevistados la respuesta de un estudiante escolar (Víctor) frente a la actividad que se muestra en la Figura 3. Luego que los entrevistados leyeran la respuesta de Víctor (Figura 4), se les consultó: ¿Cómo corregirían la respuesta del estudiante? y ¿Qué fortalezas y debilidades presenta el estudiante escolar respecto al concepto de fracción?

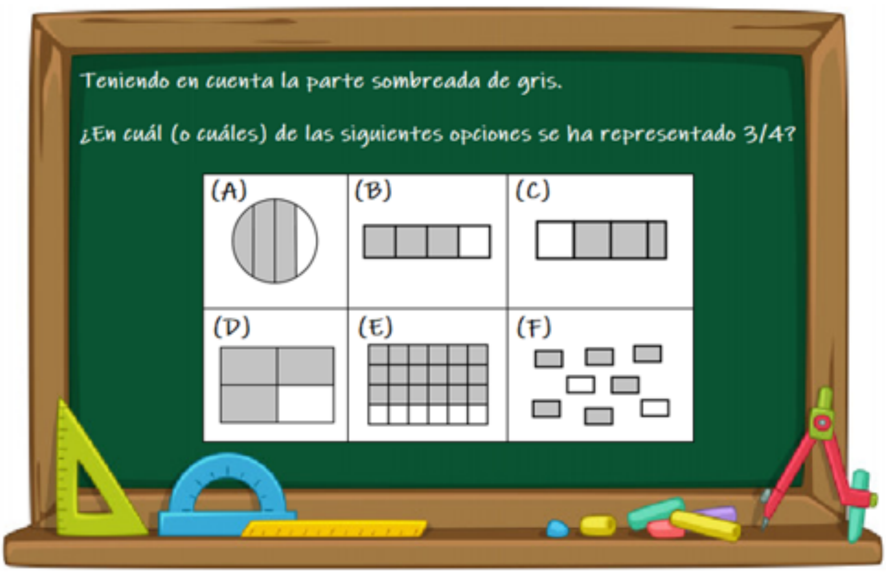


Figura 3: entrevista

Es importante señalar que las preguntas mencionadas en el párrafo anterior nos permiten explorar si los futuros maestros reconocen, en las respuestas de estudiantes escolares, errores o dificultades comunes. En particular, en un análisis a priori de las respuestas esperadas en la entrevista se puede ver que los futuros maestros pueden responder correcta o incorrectamente respecto a si las respuestas dada por el escolar es acertadas o no. Además, los entrevistados deberían poder identificar, en la respuesta de Víctor, que el escolar no tiene presente la propiedad que establece que las partes deben ser congruentes, que una parte puede estar dividida en otras partes (fracciones equivalentes) y que un grupo de partes puede ser considerado como una parte (fracciones en contextos discretos).

Respuesta de Víctor (V)
V: Mmmm, bueno yo creo que la figura A, B, C y D representan tres cuartos. **M:** ¿Por qué crees que son esas figuras? **V:** Porque en las figuras A, B, C y D hay 3 partes pintadas de 4, es decir tres cuartos.

Figura 4: respuesta de un escolar (Víctor)

En primer lugar, frente a la pregunta sobre cómo corregirían la respuesta que brindó Víctor, cuatro de los siete entrevistados (E2, E3, E5 y E7) indican claramente que la respuesta dada por el escolar es incorrecta, y en algunos casos, aunque no responden directamente indicando que es incorrecta, brindan orientaciones que muestran reconocimiento del error cometido por el escolar. En palabras de los propios entrevistados:

> Entrevistado 2: Yo le volvería a preguntar, a volver a formular la pregunta. "¿Estás seguro que las preguntas A y C realmente representan tres cuartos? Fijate en la dimensión de los cuadraditos. ¿Son todos iguales?" Volvería a hacer una pregunta. No cortaría el diálogo. Obviamente también el tema de la E, que dejó afuera.
>
> ---
>
> Entrevistado 3: Primero lo que te explicaba. Primero porque me parece que la A y la C no me parece que sean correctas, porque entiendo que tiene que estar representados en partes iguales.
>
> ---
>
> Entrevistado 5: [...] Entonces imagina que la B y la C son una barra de chocolate. Si tenemos cuatro niños, si agarramos la C... ¿Tú crees que todos los niños comerían la misma cantidad de chocolate si agarran la barra C que la barra B? ¿O habría algún niño que no esté de acuerdo con el

> pedacito que recibe? Ahora, con la A, yo le diría "¿Tú crees que en la A, si fuera una piza (porque siempre recurrimos al ejemplo del chocolate), tú crees que los niños que coman de esa piza van a comer la misma cantidad los 3 niños que van a comer esos pedacitos grises?" Así le diría.
>
> ---
>
> Entrevistado 7: [pausa]. [...] Ellos lo asocian a esto que él dice. Hay tres partes pintadas de cuatro. Y se ven los tres cuartos. Le preguntaría "En la opción A, todas las partes son iguales Víctor?" O en la parte C... Le haría visualizar.

Por otro lado, el E1 no reconoce claramente que la respuesta de Víctor es incorrecta y frente a la pregunta reiterada de si la respuesta es correcta piensa y evade la respuesta. A lo largo del diálogo logra identificar que la figura C no está dividida en partes congruentes (igualdad en cuanto a cantidad de superficie) y reconoce que cuando respondió a esta pregunta no lo tomó en cuenta, en este sentido, indica: “Me acabo de dar cuenta de algo que no me había dado cuenta en la prueba, cuando la hice. En realidad, la figura C no tiene cuatro reparticiones iguales” (E1, 2021). En consonancia con la respuesta brindada por E1 tenemos la de E4, pues al corregir la producción de Víctor indica que las opciones A, B y D son correctas pero que la C no. En palabras del propio entrevistado: “Le pondría que A, B y D sí me parece que son correctas, pero que C no porque no es proporcional... los cuadraditos no están proporcionalmente” (E4, 2021).

Al corregir la respuesta de Víctor, E6 inicialmente indica que la respuesta del estudiante es incorrecta porque incluye la opción C, en este sentido, expresa: “El C no podría ser porque el último cuadradito es más chiquito que los otros tres” (E6, 2021). Al continuar con la entrevista logra indicar que la opción A también es incorrecta, en consecuencia, señala: “[...]en realidad el primer parte sombreada de A, no representa lo mismo que la segunda y la tercera hilera” (E6, 2021).

En cuanto al reconocimiento de la dificultad de no tener en cuenta que las partes deben ser congruentes, que está presente en la respuesta de Víctor, inferimos que cinco de los entrevistados (E2, E3, E5, E6, E7) identifican dicha dificultad con claridad. En el caso de los otros dos entrevistados (E1 y E4), reconocen esta dificultad únicamente para el caso C, por lo que concluimos que no la reconocen con claridad. En este sentido, podemos ver que ellos mismos presentan dicha dificultad. En palabras de algunos de los entrevistados:

> Entrevistado 4: Por ejemplo, acá cuando le preguntamos tres cuartos, él lo que hace es, cuenta los cuadraditos. Y dice "ta, si son tres los que están pintados... para representar tres cuartos tengo que

tener tres pintados de cada figura". Sea un cuadrado, una circunferencia, no sé, él va a contar que tengamos tres cuadraditos nomás pintados. Que no tenga más que eso.

Entrevistado 6: En realidad él eligió la A, la B, la C y la D... claro porque, supongo que Víctor debe pensar, que los tres cuadraditos, que tiene que haber pintado sí o sí tres cuadraditos no importa si son más grandes o más chicos.

Entrevistado 7: [...]Ellos lo asocian a esto que él dice. Hay tres partes pintadas de cuatro. Y se ven los tres cuartos.

Conclusiones

A partir de la aplicación del cuestionario y de las entrevistas realizadas podemos ver que los futuros maestros reconocen las partes y el todo en fracciones menores a la unidad en contextos continuos. La fracción es vista como un conteo de partes tal como reporta Pazos (2009). Asimismo, se observan dificultades para "partir" y reconocer la unidad en colecciones discretas (Obando, 2003), para reconocer el todo cuando las fracciones son mayores a la unidad (Pazos, 2009) y para reconocer representaciones equivalentes cuando las unidades son geométricamente distintas y cuando las partes de la misma unidad son iguales en superficie, pero diferentes en forma.

En cuanto al conocimiento didáctico vemos que hay un conocimiento escaso, entre los entrevistados, sobre los errores que cometen los escolares. En particular, la dificultad que resulta más sencilla de identificar en la respuesta de los escolares es la de no reconocer que las partes en que se divide la unidad deben ser congruentes. Sin embargo, la dificultad que se relaciona con considerar que una parte puede estar dividida en otras partes (fracciones equivalentes) no es reconocida por los entrevistados. Para finalizar, vemos que la dificultad que se presenta al trabajar con conjuntos discretos, que implica considerar un grupo de partes como una parte no se reconoce.

Referencias bibliográficas

Carrillo-Yañez, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L. C., Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., Vasco, D., Rojas, N., Flores, P., Aguilar González, A., Ribeiro, M. y Muñoz-Catalán, M. C. (2018). The mathematics teacher's specialised knowledge (MTSK) model. *Research in Mathematics Education, 20*(3), 1-18. doi:10.1080/14794802.2018.1479981

Fandiño Pinilla, M. (2007). Fractions: conceptual and didactic aspects. *Acta Didactica Universitatis Comenianae, 7,* 23-45.

Flores-Medrano, E., Montes, M., Carrillo, J., Contreras, L. C., Muñoz-Catalán, M. C., & Liñán, M. M. (2016). El Papel del MTSK como Modelo de Conocimiento del Profesor en las Interrelaciones entre los Espacios de Trabajo Matemático. *Bolema, 30*(54), 204-221.

González Retana, J. F., & Eudave Muñoz, D. (2018). Conocimiento común del contenido del estudiante para profesor sobre fracciones y decimales. *Educación Matemática, 30*(2), 106-139. doi:10.248444/EM3002.05

Ivars, P., Buforn, A., & Llinares, S. (2016). Características del aprendizaje de estudiantes para maestro de una trayectoria de aprendizaje sobre las fracciones para apoyar el desarrollo de la competencia "mirar profesionalmente". *Acta Scientiae, 18*(4), 48-66.

León-Mantero, C., Maz-Machado, A., Madrid, M., & Casas, J. (2016). *Errores de los estudiantes a maestro cuando trabajan con fracciones*. XVI Congreso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, ni más ni menos (págs. 1-9). Universidad de Cádiz: SAEM Thales.

Llinares, S., & Sánchez, M. (1997). *Matemáticas: cultura y aprendizaje. Fracciones, N°4*. España: Síntesis.

Martínez, C., & Lascano, M. (2001). Acerca de dificultades para la enseñanza y el aprendizaje de las fracciones. *Revista EMA*, 6(2), 159-179.

Montes, M., Contreras, L. C., y Carrillo, J. (2013). Conocimiento del profesor de matemáticas: enfoques del MKT y del MTSK. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa, & N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXI*, (pp. 403-410). Universidad del País Vasco.

Obando, G. (2003). La enseñanza de los números racionales a partir de la relación parte-todo. *Revista EMA, 8*(2), 157-182.

Pazos, L. (2009). Las fracciones son un problema. *Quehacer educativo*, 40-45.

Rojas, Flores, & Carrillo. (2015). Conocimiento especializado de un profesor de matemáticas de educación primaria al enseñar los números racionales. *Bolema, 29*, 143-166.

semur
EDICIONES

ISBN: 978-9915-9642-0-1
9 789915 964201